

(D1) 脉冲双星

通过近几十年的努力，天文学家们已发现了大量的毫秒脉冲星（自旋周期 < 10 ms）。这些脉冲星的大多数来自于双星系统，这些双星系统的轨道基本都是圆轨道。

对一个在双星轨道上的脉冲星，所测得的脉冲星自旋周期(P)和所测得的视线方向加速度(a)都随着轨道运动而系统地变化。在圆轨道的情形下，这些变化能在数学上用所谓轨道相位 ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) 表达为：

$$P(\phi) = P_0 + P_t \cos\phi \quad \text{where } P_t = \frac{2\pi P_0 r}{c P_B}$$

$$a(\phi) = -a_t \sin\phi \quad \text{where } a_t = \frac{4\pi^2 r}{P_B^2}$$

其中 P_B 是双星系统的轨道周期， P_0 是脉冲星的本征自旋周期， r 是双星系统的轨道半径。

以下表格给出了一组以太阳光为参照系在不同纪元 T 时的 P 和 a 的测量数据，其中 T 以区间儒略日(tMJD)为单位，即 T 以 $\text{MJD} = 2,440,000$ 为计时零点。

No.	T (tMJD)	P (μs)	a (m s^{-2})
1	5740.654	7587.8889	-0.92 ± 0.08
2	5740.703	7587.8334	-0.24 ± 0.08
3	5746.100	7588.4100	-1.68 ± 0.04
4	5746.675	7588.5810	$+1.67 \pm 0.06$
5	5981.811	7587.8836	$+0.72 \pm 0.06$
6	5983.932	7587.8552	-0.44 ± 0.08
7	6005.893	7589.1029	$+0.52 \pm 0.08$
8	6040.857	7589.1350	$+0.00 \pm 0.04$
9	6335.904	7589.1358	$+0.00 \pm 0.02$

By plotting $a(\phi)$ as a function of $P(\phi)$, we can obtain a parametric curve. As evident from the relations above, this curve in the period-acceleration plane is an ellipse.

如果画出 $a(\phi)$ 随 $P(\phi)$ 变化的趋势，我们会得到一个参数曲线。从以上给出的条件可以看出，这条曲线在 p - a 平面内构成了一个椭圆。

本题中，通过分析这一组数据，在圆轨道的假设下，我们将估算本征自旋周期 P_0 ，轨道周期 P_B ，和轨道半径 r 。

- (D1.1) 以 P 为横轴， a 为纵轴画出这些数据点，注意画出相应的误差棒（将该图标为“D1.1”）。
7
- (D1.2) 画出一个最能契合这些数据点所在位置的椭圆（在同一幅“D1.1”图上）。
2
- (D1.3) 利用画出的图像，估算 P_0 , P_t 和 a_t ，及各自的误差范围（只是估算！）
7
- (D1.4) 以 P_0 , P_t , a_t 为参数，写出 P_B 和 r 的表达式。
4
- (D1.5) 在 (D1.3) 的基础上，算出 P_B 和 r 的近似值及误差范围。
6
- (D1.6) 针对数据表中的第 1, 4, 6, 8, 9 次观测数据点（共五个），计算它们各自的（轨道）相位。
4
- (D1.7) 在 (D1.6) 结果的基础上，请通过以下方式改进对轨道周期 P_B 的估算：
- (D1.7a) 先确定起始纪元 T_0 。 T_0 对应的是第一次观测以前最近的一个零相位的时间点。
2
- (D1.7b) 每次观测的轨道相位所对应的预期时间 T_{calc} 由如下公式给出：
7

$$T_{\text{calc}} = T_0 + \left(n + \frac{\phi}{360^\circ}\right) P_B,$$

其中 n 为 T_0 和 T (或 T_{calc})间可能经过的整数相位周期数。请为(D1.6)中的五次观测的每一次估算它们所对应的 n 和 T_{calc} 。请记下每个计算的 T_{calc} 和观测值 T 的差别(T_{0-c})，并把这些计算值填写到答题纸相应的表格中。

(D1.7c) 以 n 为横轴， T_{0-c} 为纵轴，画出对应的数据图。(将图标为“D1.7”)

4

(D1.7d) 确定初始纪元 $T_{0,r}$ 和轨道周期 $P_{B,r}$ 的改进计算值。

7

(D2) 到月球的距离

下表中给出了2015年9月以地心为坐标原点测量月球的星表。每天的数据都是在00:00 UT采集的。

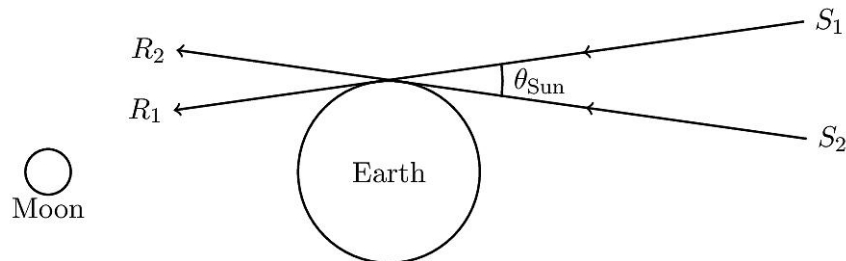
Date 日期	R.A. (α) 赤经			Dec. (δ) 赤纬			Angular Size (θ) 张角	Phase (ϕ) 相位	Elongation Of Moon 东西距角
	h	m	s	°	'	"	"		
Sep 01	0	36	46.02	3	6	16.8	1991.2	0.927	148.6° W
Sep 02	1	33	51.34	7	32	26.1	1974.0	0.852	134.7° W
Sep 03	2	30	45.03	11	25	31.1	1950.7	0.759	121.1° W
Sep 04	3	27	28.48	14	32	4.3	1923.9	0.655	107.9° W
Sep 05	4	23	52.28	16	43	18.2	1896.3	0.546	95.2° W
Sep 06	5	19	37.25	17	55	4.4	1869.8	0.438	82.8° W
Sep 07	6	14	19.23	18	7	26.6	1845.5	0.336	70.7° W
Sep 08	7	7	35.58	17	23	55.6	1824.3	0.243	59.0° W
Sep 09	7	59	11.04	15	50	33.0	1806.5	0.163	47.5° W
Sep 10	8	49	0.93	13	34	55.6	1792.0	0.097	36.2° W
Sep 11	9	37	11.42	10	45	27.7	1780.6	0.047	25.1° W
Sep 12	10	23	57.77	7	30	47.7	1772.2	0.015	14.1° W
Sep 13	11	9	41.86	3	59	28.8	1766.5	0.001	3.3° W
Sep 14	11	54	49.80	0	19	50.2	1763.7	0.005	7.8° E
Sep 15	12	39	50.01	-3	20	3.7	1763.8	0.026	18.6° E
Sep 16	13	25	11.64	-6	52	18.8	1767.0	0.065	29.5° E
Sep 17	14	11	23.13	-10	9	4.4	1773.8	0.120	40.4° E
Sep 18	14	58	50.47	-13	2	24.7	1784.6	0.189	51.4° E
Sep 19	15	47	54.94	-15	24	14.6	1799.6	0.270	62.5° E
Sep 20	16	38	50.31	-17	6	22.8	1819.1	0.363	73.9° E
Sep 21	17	31	40.04	-18	0	52.3	1843.0	0.463	85.6° E
Sep 22	18	26	15.63	-18	0	41.7	1870.6	0.567	97.6° E
Sep 23	19	22	17.51	-17	0	50.6	1900.9	0.672	110.0° E
Sep 24	20	19	19.45	-14	59	38.0	1931.9	0.772	122.8° E
Sep 25	21	16	55.43	-11	59	59.6	1961.1	0.861	136.2° E
Sep 26	22	14	46.33	-8	10	18.3	1985.5	0.933	150.0° E
Sep 27	23	12	43.63	-3	44	28.7	2002.0	0.981	164.0° E
Sep 28	0	10	48.32	0	58	58.2	2008.3	1.000	178.3° E
Sep 29	1	9	5.89	5	38	54.3	2003.6	0.988	167.4° W
Sep 30	2	7	39.02	9	54	16.1	1988.4	0.947	153.2° W

下图是一副有关当月发生的月全食的复合图像，照片拍摄于整个月全食过程的不同时间。每次拍摄的图像中心都是地球本影南北连线的中心点。

本题中，假设观测者位于地心，角距指的是天体或影子的角直径。



- (D2.1) 2015年9月，月球轨道远地点对应的月相是新月（New Moon）、上弦月（First Quarter）、满月（Full Moon）还是下弦月（Third Quarter）？请把你的选择以打勾的形式填写在答题纸对应的表格中。本小题不需要解题过程。 4
- (D2.2) 2015年9月，月球轨道升交点对应的月相是新月（New Moon）、上弦月（First Quarter）、满月（Full Moon）还是下弦月（Third Quarter）？请把你的选择以打勾的形式填写在答题纸对应的表格中。本小题不需要解题过程。 4
- (D2.3) 利用提供的数据计算月球轨道偏心率 e 。 4
- (D2.4) 请以月球的角直径为单位 θ_{Moon} ，计算地球本影的角直径 θ_{umbra} 。解题过程中你需要在答题纸反面的图片作图，并保留作图痕迹。 8
- (D2.5) 如图所示，月食当日太阳相对于地球的张角即太阳的视直径为 $\theta_{\text{Sun}} = 1915.0''$ 。图中 S_1R_1 和 S_2R_2 分别是来自太阳视圆面边缘正好完全相对的两个点发出的光线。图像并没有按比例画出。 9



- 假设观测者位于地心。请以月球的角直径为单位 θ_{Moon} ，计算地球半影的角直径 θ_{penumbra} 。
- (D2.6) 用 θ_{Earth} 表示从月球中心观测到的地球的角直径。请以 θ_{Earth} 为单位表示月食当天从地心观测到的月球的角直径 θ_{Moon} 。 5
- (D2.7) 根据以上的结论，以km为单位，计算月球的半径 R_{Moon} 。 3
- (D2.8) 估算月球到地球的最近距离 r_{perigee} 和最远距离 r_{apogee} 。 4
- (D2.9) 利用9月10日的数据计算日地距离 d_{Sun} 。 10

(D3) Ia型超新星

Ia型超新星是进行银河系外超远距离测量的重要工具。这类天体爆发达到亮度极值及之后变暗的过程所对应的光变曲线具有典型特征，可以用于进行Ia型超新星的证认。如果把光变曲线进行适当的比例调整，会发现所有Ia型超新星的光变曲线都具有相同的变化趋势。为了达到这个效果，首先，我们需要画出以寄主星系为坐标系的光变曲线。寄主星系的每个观测时间间隔 Δt_{obs} 都会因为受到宇宙学延展的影响而变长，变化的比例系数为 $(1 + z)$ 。在静止参考系中，寄主星系的时间间隔记作 Δt_{gal} 。

静止参考系中，一颗超新星从亮度极大值到星等值改变2个星等所经历的时间间隔为 Δt_0 。如果我们用尺度因子 s 对时间间隔进行比例修正（ $\Delta t_s = s \Delta t_{\text{gal}}$ ）使得所有的超新星的时间间隔 Δt_0 都

化作同一个数值，那么会发现所有光变曲线的形状都会是相同的。又已知尺度因子 s 与超新星爆发时达到最大光度时的绝对星等 M_{peak} 呈线性关系，关系式为

$$s = a + bM_{\text{peak}}$$

其中 a 和 b 是常数。知道了这个公式中的比例因子，就可以得到未知距离的超新星的绝对星等。

下表中给出了三颗超新星的数据，包括他们在不同时间的距离模数 μ （给出了前两颗的）、退行速度 cz 和视星等 m_{obs} 。定义 $\Delta t_{\text{obs}} \equiv t - t_{\text{peak}}$ 表示相对于超新星爆发达到极亮的天数差。观测得到的星等值已经修正了星际消光和大气改正。

Name	SN2006TD	SN2006IS	SN2005LZ
μ (mag)	34.27	35.64	
cz (km s ⁻¹)	4515	9426	12060
Δt_{obs} (days)	m_{obs} (mag)	m_{obs} (mag)	m_{obs} (mag)
-15.00	19.41	18.35	20.18
-10.00	17.48	17.26	18.79
-5.00	16.12	16.42	17.85
0.00	15.74	16.17	17.58
5.00	16.06	16.41	17.72
10.00	16.72	16.82	18.24
15.00	17.53	17.37	18.98
20.00	18.08	17.91	19.62
25.00	18.43	18.39	20.16
30.00	18.64	18.73	20.48

- (D3.1) 估算三颗超新星的 Δt_{gal} 值，把结果填写到答题纸背面对应的表格中。把静止坐标系下三颗超新星各自的光变曲线画在同一个坐标图中，并标明“D3.1”。 15
- (D3.2) 把超新星SN2006IS的尺度因子 s_2 设为1.00。请通过计算SN2006TD和SN2005LZ的 Δt_0 得到它们各自的尺度因子 s_1 和 s_3 。 5
- (D3.3) 估算三颗超新星各自被修正后的时间间隔 Δt_s 。把结果填写在答题纸反面相应的表格中。把三颗超新星各自的光变曲线画在同一个坐标图中，由此证实他们具有相同的轮廓，并标明“D3.3”。 14
- (D3.4) 计算SN2006TD和SN2006IS达到亮度极值时分别对应的绝对星等 $M_{\text{peak},1}$ 和 $M_{\text{peak},2}$ ，并由此计算 a 和 b 。 6
- (D3.5) 计算SN2005LZ达到亮度极值时的绝对星等 $M_{\text{peak},3}$ 和距离模数 μ_3 。 4
- (D3.6) 利用距离模数 μ_3 计算哈勃常数 H_0 。进而估算宇宙年龄 T_H 。 6