

**(D1) Dvojni pulsar**

Sustavnim potragama tijekom zadnjih desetljeća astronomi su pronašli velik broj milisekundnih pulsara (period rotacije  $< 10$  ms). Većina tih pulsara pronađena je u dvojnim sustavima i u gotovo kružnim stazama.

Za pulsar u dvojnog sustavu, izmjereni period rotacije pulsara ( $P$ ) i izmjerena akceleracija u smjeru doglednice ( $a$ ) sustavno se mijenjaju zbog orbitalnog gibanja. Za kružne orbite ta promjena može biti opisana matematički preko orbitalne faze  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) kako slijedi:

$$P(\phi) = P_0 + P_t \cos\phi \quad \text{gdje je} \quad P_t = \frac{2\pi P_0 r}{c P_B}$$

$$a(\phi) = -a_t \sin\phi \quad \text{gdje je} \quad a_t = \frac{4\pi^2 r}{P_B^2}$$

pri čemu je  $P_B$  orbitalni period dvojnog sustava,  $P_0$  je stvarni period rotacije pulsara i  $r$  je polumjer staze.

U sljedećoj tablici nalaze se podaci dobiveni takvim mjerenjima za  $P$  i  $a$  pri različitim heliocentričnim trenucima mjerenja  $T$  izraženim u skraćenim modificiranim julijanskim danima (tMJD), odn. broju dana nakon  $MJD = 2\,400\,000$ .

Broj	$T$ (tMJD)	$P$ ( $\mu$ s)	$a$ ( $m\ s^{-2}$ )
1	5740,654	7587,8889	-0,92 $\pm$ 0,08
2	5740,703	7587,8334	-0,24 $\pm$ 0,08
3	5746,100	7588,4100	-1,68 $\pm$ 0,04
4	5746,675	7588,5810	+1,67 $\pm$ 0,06
5	5981,811	7587,8836	+0,72 $\pm$ 0,06
6	5983,932	7587,8552	-0,44 $\pm$ 0,08
7	6005,893	7589,1029	+0,52 $\pm$ 0,08
8	6040,857	7589,1350	+0,00 $\pm$ 0,04
9	6335,904	7589,1358	+0,00 $\pm$ 0,02

Ako nacrtamo  $a(\phi)$  u ovisnosti o  $P(\phi)$  možemo dobiti parametarsku krivulju. Kao što je vidljivo iz gornjih jednadžbi ta krivulja period-akceleracija je elipsa.

U ovom zadatku ćemo odrediti stvarni period rotacije  $P_0$ , orbitalni period  $P_B$  i polumjer staze  $r$  analizom zadanih podataka uz pretpostavku da je staza kružna.

- (D1.1) Iz ovih podataka ucrtajte točke u graf period - akceleracija, uključujući i pripadajuće greške (error bars), te označite vaš graf s "D1.1". 7  
2
- (D1.2) Nacrtajte elipsu koja najbolje odgovara (best fit) tim podacima (na istom grafu "D1.1").
- (D1.3) Iz grafa odredite  $P_0$ ,  $P_t$  i  $a_t$ , uključujući i pripadajuću grešku. 7
- (D1.4) Izvedite izraze za  $P_B$  i  $r$  iskazane preko  $P_0$ ,  $P_t$  i  $a_t$ . 4
- (D1.5) Izračunajte približnu vrijednost za  $P_B$  i  $r$  na osnovu vaših izračuna koje ste napravili u (D1.3), uključujući i pripadajuće greške. 6
- (D1.6) Izračunajte orbitalnu fazu  $\phi$  koja odgovara trenucima pet mjerenja iz gornje tablice za sljedeća opažanja: 1, 4, 6, 8 i 9. 4
- (D1.7) Poboljšajte izračun orbitalnog perioda  $P_B$  koristeći rezultate iz (D1.6) na sljedeći način:  
(D1.7a) Prvo odredite početni trenutak  $T_0$  koji odgovara trenutku koji je najbliži orbitalnoj fazi nula prije prvog opažanja. 2

(D1.7b) Očekivani trenutak  $T_{\text{calc}}$  predviđenog faznog kuta svakog opažanja dan je izrazom: 7

$$T_{\text{calc}} = T_0 + \left(n + \frac{\phi}{360^\circ}\right) P_B,$$

gdje je  $n$  broj punih ciklusa koji su mogli proći između trenutaka  $T_0$  i  $T_{\text{calc}}$ . Za svako od pet opažanja iz dijela (D1.6) odredite  $n$  i  $T_{\text{calc}}$ . Odredite razliku  $T_{O-C}$  između opažanog  $T$  i  $T_{\text{calc}}$ . Upišite rezultate u tablicu koja se nalazi na listu za rješenja.

(D1.7c) Nacrtajte graf ovisnosti  $T_{O-C}$  o  $n$  (označite vaš graf "D1.7"). 4

(D1.7d) Odredite poboljšane vrijednosti početnog trenutka  $T_{0,r}$  i orbitalnog perioda  $P_{B,r}$ . 7

## (D2) Udaljenost do Mjeseca

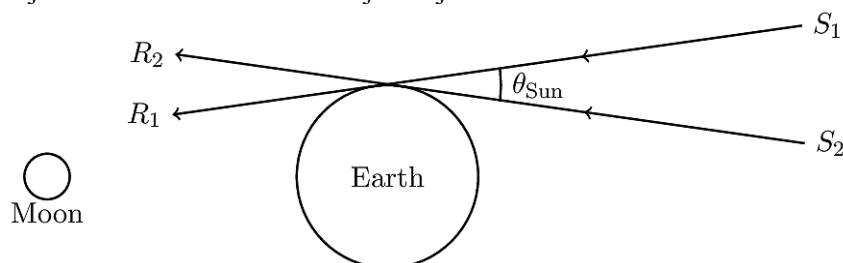
Geocentrične efemeride Mjeseca tijekom rujna 2015. g. dane su u tabličnom obliku. Svaki podatak vrijedi za 00:00 UT.

Datum	R.A. ( $\alpha$ )			Dec. ( $\delta$ )			Prividni kutni promjer ( $\theta$ )	Faza ( $\phi$ )	Elongacija Mjeseca
	h	m	s	°	'	"			
Rujan 01	0	36	46,02	3	6	16,8	1991,2	0,927	148,6° W
Rujan 02	1	33	51,34	7	32	26,1	1974,0	0,852	134,7° W
Rujan 03	2	30	45,03	11	25	31,1	1950,7	0,759	121,1° W
Rujan 04	3	27	28,48	14	32	4,3	1923,9	0,655	107,9° W
Rujan 05	4	23	52,28	16	43	18,2	1896,3	0,546	95,2° W
Rujan 06	5	19	37,25	17	55	4,4	1869,8	0,438	82,8° W
Rujan 07	6	14	19,23	18	7	26,6	1845,5	0,336	70,7° W
Rujan 08	7	7	35,58	17	23	55,6	1824,3	0,243	59,0° W
Rujan 09	7	59	11,04	15	50	33,0	1806,5	0,163	47,5° W
Rujan 10	8	49	0,93	13	34	55,6	1792,0	0,097	36,2° W
Rujan 11	9	37	11,42	10	45	27,7	1780,6	0,047	25,1° W
Rujan 12	10	23	57,77	7	30	47,7	1772,2	0,015	14,1° W
Rujan 13	11	9	41,86	3	59	28,8	1766,5	0,001	3,3° W
Rujan 14	11	54	49,80	0	19	50,2	1763,7	0,005	7,8° E
Rujan 15	12	39	50,01	-3	20	3,7	1763,8	0,026	18,6° E
Rujan 16	13	25	11,64	-6	52	18,8	1767,0	0,065	29,5° E
Rujan 17	14	11	23,13	-10	9	4,4	1773,8	0,120	40,4° E
Rujan 18	14	58	50,47	-13	2	24,7	1784,6	0,189	51,4° E
Rujan 19	15	47	54,94	-15	24	14,6	1799,6	0,270	62,5° E
Rujan 20	16	38	50,31	-17	6	22,8	1819,1	0,363	73,9° E
Rujan 21	17	31	40,04	-18	0	52,3	1843,0	0,463	85,6° E
Rujan 22	18	26	15,63	-18	0	41,7	1870,6	0,567	97,6° E
Rujan 23	19	22	17,51	-17	0	50,6	1900,9	0,672	110,0° E
Rujan 24	20	19	19,45	-14	59	38,0	1931,9	0,772	122,8° E
Rujan 25	21	16	55,43	-11	59	59,6	1961,1	0,861	136,2° E
Rujan 26	22	14	46,33	-8	10	18,3	1985,5	0,933	150,0° E
Rujan 27	23	12	43,63	-3	44	28,7	2002,0	0,981	164,0° E
Rujan 28	0	10	48,32	0	58	58,2	2008,3	1,000	178,3° E
Rujan 29	1	9	5,89	5	38	54,3	2003,6	0,988	167,4° W
Rujan 30	2	7	39,02	9	54	16,1	1988,4	0,947	153,2° W

Na sljedećoj stranici nalazi se mozaik fotografija Mjeseca koje su snimljene u različite trenutke tijekom pomrčine Mjeseca koja se zbila u rujnu. Svaki snimak postavljen je na konačnu fotografiju tako da odgovara relativnom položaju Mjeseca u odnosu na sjenu. Kod ovog zadatka uzimamo da se opažatelj nalazi u središtu Zemlje, dok se kutne veličine odnose na kutne promjere objekata, odnosno sjene.



- (D2.1) Apogej Mjesečeve staze tijekom rujna 2015. g. najbliži je: mladaku (New Moon) / prvoj četvrti (First Quarter) / uštapu (Full Moon) / zadnjoj četvrti (Third Quarter). Označi točan odgovor na listu za odgovore. Nije potrebno objašnjenje ovog odgovora. 3
- (D2.2) Tijekom rujna 2015. g. uzlazni čvor Mjesečeve staze najbliži je: mladaku (New Moon) / prvoj četvrti (First Quarter) / uštapu (Full Moon) / zadnjoj četvrti (Third Quarter). Označi točan odgovor na listu za odgovore. Nije potrebno objašnjenje ovog odgovora. 4
- (D2.3) Pomoću danih podataka izračunajte ekscentricitet  $e$  Mjesečeve staze. 4
- (D2.4) Odredite kutnu veličinu sjene  $\theta_{\text{umbra}}$  izraženu preko kutne veličine Mjeseca  $\theta_{\text{Moon}}$ . Zadatak rješavajte na slici koja se nalazi na stražnjoj stranici lista za odgovore. 8
- (D2.5) Poznato je da kut pod kojim se vidi Sunce sa Zemlje na dan pomrčine Mjeseca iznosi  $\theta_{\text{Sun}} = 1915,0''$ . Na donjoj skici  $S_1R_1$  i  $S_2R_2$  su zrake svjetlosti koje dolaze s dijametralno suprotnih krajeva Sunčeva diska. Skica nije u mjerilu. 9



- Izračunajte kutnu veličinu polusjene  $\theta_{\text{penumbra}}$  iskazanu preko  $\theta_{\text{Moon}}$ . Pretpostavite da se opažać nalazi u središtu Zemlje.
- (D2.6) Neka je  $\theta_{\text{Earth}}$  kutna veličina Zemlje ako gledamo iz središta Mjeseca. Izračunajte kutnu veličinu Mjeseca  $\theta_{\text{Moon}}$  iskazanu preko  $\theta_{\text{Earth}}$  ako gledamo iz središta Zemlje na dan pomrčine. 5
- (D2.7) Pomoću gornjih rezultata izračunajte polumjer Mjeseca  $R_{\text{Moon}}$  u km. 3
- (D2.8) Izračunajte najmanju  $r_{\text{perigee}}$  i najveću udaljenost  $r_{\text{apogee}}$  Mjeseca. 4
- (D2.9) Pomoću odgovarajućih podataka od 10. rujna odredite udaljenost  $d_{\text{Sun}}$  Sunca od Zemlje. 10

(D3) **Supernove tipa Ia**

Supernove tipa Ia smatraju se vrlo važnima za mjerenje velikih izvangalaktičkih udaljenosti. Porast i kasnije opadanje sjaja kod tih eksplozija ima karakterističnu krivulju sjaja što pomaže pri njihovom indentificiranju kao supernove tipa Ia.

Krivulje sjaja svih supernova tipa Ia, ako su prikazane u pravilnom omjeru, mogu se prilagoditi istom modelu krivulje sjaja. Kako bi to postigli, najprije moramo prikazati krivulje sjaja u inercijalnom sustavu galaksije u kojoj se zbila eksplozija uzimajući u obzir kozmološko produljivanje/dilataciju svih opaženih vremenskih intervala  $\Delta t_{\text{obs}}$  za faktor  $(1 + z)$ . Vremenski interval u inercijalnom sustavu galaktike u kojoj se nalazi supernova označen je s  $\Delta t_{\text{gal}}$ .

Krivulja sjaja supernove u referentnom sustavu promjeni se za dvije zvjezdane veličine u usporedbi s maksimumom i to u vremenskom intervalu  $\Delta t_0$  nakon maksimuma. Nadalje, ako promijenimo vremenske intervale za faktor proporcionalnosti  $s$  (tj.  $\Delta t_s = s \Delta t_{\text{gal}}$ ) tako da je proporcionalna vrijednost  $\Delta t_0$  ista za sve supernove, krivulje sjaja imati će iste oblike. Također se pokazalo da je faktor  $s$  linearno povezan s apsolutnom zvjezdanom veličinom  $M_{\text{peak}}$  kada je supernova u najvećem sjaju. Tako možemo napisati:

$$s = a + bM_{\text{peak}},$$

gdje su  $a$  i  $b$  konstante. Ako znamo faktor proporcionalnosti, možemo iz gornje linearne jednadžbe odrediti apsolutne zvjezdane veličine supernova na nepoznatim udaljenostima.

U donjoj tablici nalaze se podaci o tri supernove, uključujući njihove module udaljenosti  $\mu$  (za prve dvije), njihove brzine udaljavanja  $cz$  i njihove prividne zvjezdane veličine  $m_{\text{obs}}$  za različite trenutke. Vrijeme  $\Delta t_{\text{obs}} \equiv t - t_{\text{peak}}$  prikazuje broj dana proteklih od dana kada je odgovarajuća supernova postigla najveći sjaj. Opažene zvjezdane veličine već su korigirane za međuzvjezdanu i atmosfersku ekstinkciju.

Naziv	SN2006TD	SN2006IS	SN2005LZ
$\mu$ (mag)	<b>34,27</b>	<b>35,64</b>	
$cz$ (km s <sup>-1</sup> )	<b>4515</b>	<b>9426</b>	<b>12060</b>
$\Delta t_{\text{obs}}$ (dani)	$m_{\text{obs}}$ (mag)	$m_{\text{obs}}$ (mag)	$m_{\text{obs}}$ (mag)
-15,00	19,41	18,35	20,18
-10,00	17,48	17,26	18,79
-5,00	16,12	16,42	17,85
0,00	15,74	16,17	17,58
5,00	16,06	16,41	17,72
10,00	16,72	16,82	18,24
15,00	17,53	17,37	18,98
20,00	18,08	17,91	19,62
25,00	18,43	18,39	20,16
30,00	18,64	18,73	20,48

- (D3.1) Za sve tri supernove izračunajte vrijednosti  $\Delta t_{\text{gal}}$  i upišite ih unutar praznih polja u tablicama koje se nalaze na stražnjoj (BACK) strani lista za odgovore. Na milimetarskom papiru ucrtajte točke, te nacrtajte tri krivulje sjaja u inercijalnom sustavu (označite graf kao "D3.1"). 15
- (D3.2) Neka faktor proporcionalnosti  $s_2$  za supernovu SN2006IS iznosi 1,0. Odredite faktore proporcionalnosti  $s_1$  i  $s_3$  za preostale dvije supernove SN2006TD i SN2005LZ računanjem  $\Delta t_0$  za njih. 5
- (D3.3) Izračunajte proporcionalizirane razlike vremena  $\Delta t_s$  za sve tri supernove. Upišite vrijednosti  $\Delta t_s$  u iste tablice na listu za odgovore. Na drugom milimetarskom papiru ucrtajte točke i nacrtajte 3 krivulje sjaja kako biste provjerili imaju li sada identičan oblik (označite graf kao "D3.3"). 14
- (D3.4) Izračunajte iznose apsolutnih zvjezdanih veličina u maksimumu sjaja,  $M_{\text{peak},1}$ , za SN2006TD, te  $M_{\text{peak},2}$  za SN2006IS. Pomoću ovih iznosa izračunajte  $a$  i  $b$ . 6
- (D3.5) Za SN2005LZ izračunajte iznos apsolutne zvjezdane veličine u maksimumu sjaja  $M_{\text{peak},3}$  i modul udaljenost  $\mu_3$ . 4
- (D3.6) Pomoću modula udaljenosti  $\mu_3$  odredi iznos Hubbleove konstante  $H_0$ . Nadalje, odredi karakterističnu starost svemira  $T_H$ . 6