

(D1) **쌍성 펄서(Binary Pulsar)**

지난 수 십 년간 체계적인 연구를 통해, 천문학자들은 많은 수의 millisecond(1000분의 1초) 펄서 (자전주기 < 10 ms)를 발견했다. 이들 펄서는 대부분 원 궤도를 도는 쌍성에서 발견된다.

쌍성 궤도 내의 펄서에 대해서, 펄서 자전 주기(pulsar spin period, P)와 시선 방향 가속도(line-of-sight acceleration, a)를 관측할 수 있는데, 이 값들은 모두 궤도 운동 때문에 체계적으로 변한다. 원 궤도에서, 이 변화는 궤도 위상 ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$)을 사용해서 아래와 같이 수학적으로 표현된다.

$$P(\phi) = P_0 + P_t \cos\phi \quad \text{where } P_t = \frac{2\pi P_0 r}{c P_B}$$

$$a(\phi) = -a_t \sin\phi \quad \text{where } a_t = \frac{4\pi^2 r}{P_B^2}$$

여기에서 P_B 는 쌍성의 궤도 주기(orbital period of the binary), P_0 는 펄서의 고유 자전 주기(intrinsic spin period of the pulsar), r 은 궤도 반경(radius of the orbit)이다.

아래 표에는 변경된 율리우스 일(truncated Modified Julian Days, tMJD)로 표현된 여러 태양시 기점(epochs) T 에 측정된 펄서 자전 주기 P 와 시선 방향 가속도 a 값이 실려 있다. 참고로 tMJD는 MJD 2,440,000일부터 시작한다.

No.	T (tMJD)	P (μ s)	a ($m s^{-2}$)
1	5740.654	7587.8889	- 0.92 \pm 0.08
2	5740.703	7587.8334	- 0.24 \pm 0.08
3	5746.100	7588.4100	- 1.68 \pm 0.04
4	5746.675	7588.5810	+ 1.67 \pm 0.06
5	5981.811	7587.8836	+ 0.72 \pm 0.06
6	5983.932	7587.8552	- 0.44 \pm 0.08
7	6005.893	7589.1029	+ 0.52 \pm 0.08
8	6040.857	7589.1350	+ 0.00 \pm 0.04
9	6335.904	7589.1358	+ 0.00 \pm 0.02

$P(\phi)$ 대해서 $a(\phi)$ 의 점들을 찍어서 지표 곡선(parametric curve)을 구할 수 있다. 위의 관계식에서 보듯이 이 곡선은 주기-가속도 평면에서 타원이다.

이 문제에서는, 이들 자료가 원 궤도를 가정하고 구해졌다고 보고, 고유 자전 주기(intrinsic spin period, P_0), 공전주기(orbital period, P_B), 그리고 궤도 반경(orbital radius, r)을 추정한다.

- (D1.1) 주기-가속도 평면 상에 위의 데이터(오차 포함)를 점 찍어 나타내시오. (그래프에 “D1.1”으로 표시할 것). 7
- (D1.2) 위 자료에 가장 잘 들어맞는 타원을 그리시오 (그래프의 점들에 가장 가깝게 지나도록 “D1.1” 그래프 위에 그리시오). 2
- (D1.3) 이 그림을 이용해서 오차를 포함한 P_0, P_t, a_t 의 값을 추정하시오. 7
- (D1.4) 앞의 수식으로부터 P_B 와 r 을 P_0, P_t, a_t 의 함수로 표현하시오. 4
- (D1.5) 앞의 문제 (D1.3)에서 구한 값을 토대로 대략적인 P_B 와 r 값과 그 오차를 계산하시오. 6

(D1.6) 위 테이블의 다섯 개의 기점 데이터 (No. 1, 4, 6, 8, 9)를 이용해서 궤도 위상 ϕ 값을 계산하시오 4

(D1.7) 앞의 문제 (D1.6)의 결과를 토대로 아래의 방법을 이용해서 공전주기 P_B 의 값을 다시 계산하려고 한다:

(D1.7a) 첫 관측 이전에 궤도 위상 각(ϕ)이 0에 가장 가까운 초기 기점(initial epoch, T_0)을 구하시오. 2

(D1.7b) 추정된 궤도 위상 각 (ϕ)으로 표현된 예측 기점(T_{cat})은 아래와 같이 표현할 수 있다. 7

$$T_{\text{cat}} = T_0 + \left(n + \frac{\phi}{360^\circ} \right) P_B,$$

여기에서 n 은 T_0 부터 T (혹은 T_{cat}) 시간까지 궤도 위상 각(orbital phase angle)의 왕복이 몇 번이나 이루어졌는지를 의미한다. 위의 (D1.6)에서 언급된 다섯 번의 관측 과정마다 예측되는 n 과 T_{cat} 들을 구하시오. 그리고 관측된 T 와 계산된 T_{cat} 의 차이 T_{0-c} 를 구하시오. 위상(ϕ) 값과 $n, T_{\text{cat}}, T_{0-c}$ 의 값을 답안지의 표에 기입하시오.

(D1.7c) n 을 X축으로 하고, T_{0-c} 의 점들을 찍어서 그래프를 그리시오. (그래프에 “D1.7”로 표기할 것) 4

(D1.7d) 그래프를 이용해서 개선된 초기 기점 $T_{0,r}$ 과 공전 주기 $P_{B,r}$ 를 구하시오. 7

(D2) 달까지의 거리(Distance to the Moon)

2015년 9월 동안, 매 00:00 UT마다 달의 모습을 지구에서 측정한 기록은 아래 표와 같다..

Date	R.A. (α)			Dec. (δ)			Angular Size(θ)	Phase(ϕ)	Elongation
	h	m	s	°	'	"	"		Of Moon
Sep 01	0	36	46.02	3	6	16.8	1991.2	0.927	148.6° W
Sep 02	1	33	51.34	7	32	26.1	1974.0	0.852	134.7° W
Sep 03	2	30	45.03	11	25	31.1	1950.7	0.759	121.1° W
Sep 04	3	27	28.48	14	32	4.3	1923.9	0.655	107.9° W
Sep 05	4	23	52.28	16	43	18.2	1896.3	0.546	95.2° W
Sep 06	5	19	37.25	17	55	4.4	1869.8	0.438	82.8° W
Sep 07	6	14	19.23	18	7	26.6	1845.5	0.336	70.7° W
Sep 08	7	7	35.58	17	23	55.6	1824.3	0.243	59.0° W
Sep 09	7	59	11.04	15	50	33.0	1806.5	0.163	47.5° W
Sep 10	8	49	0.93	13	34	55.6	1792.0	0.097	36.2° W
Sep 11	9	37	11.42	10	45	27.7	1780.6	0.047	25.1° W
Sep 12	10	23	57.77	7	30	47.7	1772.2	0.015	14.1° W
Sep 13	11	9	41.86	3	59	28.8	1766.5	0.001	3.3° W
Sep 14	11	54	49.80	0	19	50.2	1763.7	0.005	7.8° E
Sep 15	12	39	50.01	-3	20	3.7	1763.8	0.026	18.6° E
Sep 16	13	25	11.64	-6	52	18.8	1767.0	0.065	29.5° E
Sep 17	14	11	23.13	-10	9	4.4	1773.8	0.120	40.4° E
Sep 18	14	58	50.47	-13	2	24.7	1784.6	0.189	51.4° E
Sep 19	15	47	54.94	-15	24	14.6	1799.6	0.270	62.5° E
Sep 20	16	38	50.31	-17	6	22.8	1819.1	0.363	73.9° E
Sep 21	17	31	40.04	-18	0	52.3	1843.0	0.463	85.6° E
Sep 22	18	26	15.63	-18	0	41.7	1870.6	0.567	97.6° E
Sep 23	19	22	17.51	-17	0	50.6	1900.9	0.672	110.0° E
Sep 24	20	19	19.45	-14	59	38.0	1931.9	0.772	122.8° E
Sep 25	21	16	55.43	-11	59	59.6	1961.1	0.861	136.2° E
Sep 26	22	14	46.33	-8	10	18.3	1985.5	0.933	150.0° E
Sep 27	23	12	43.63	-3	44	28.7	2002.0	0.981	164.0° E
Sep 28	0	10	48.32	0	58	58.2	2008.3	1.000	178.3° E
Sep 29	1	9	5.89	5	38	54.3	2003.6	0.988	167.4° W
Sep 30	2	7	39.02	9	54	16.1	1988.4	0.947	153.2° W

아래의 그림은, 이 달에 발생한 월식 동안 시간대를 달리하여 찍은 사진을 하나로 합성한 것이다. 각각의 사진은 달 중심이 일치하도록 본영 수직선의 중심선에 일치시켰다. 이 문제에서, 관측자는 지구 중심에 있다고 가정하고 물체/그림자의 각 지름은 해당 물체의 각 크기라고 가정한다.



- (D2.1) 2015년 9월, 달 궤도의 원지점(apogee)은 아래 중 하나에 제일 가깝다. 3
 초생(New Moon) / 상현(First Quarter) / 보름(Full Moon) / 하현(Third Quarter)
 답안지에 해당하는 칸에 'V' 표시하시오. 관련된 설명은 하지 않아도 된다.
- (D2.2) 2015년 9월, 황도 면에 대한 달 궤도의 승교점(ascending node)은 아래 중 하나에 제일 가깝다. 4
 초생 (New Moon) / 상현(First Quarter) / 보름(Full Moon) / 하현(Third Quarter).
 답안지에 해당하는 칸에 'V' 표시하시오. 관련된 설명은 하지 않아도 된다.
- (D2.3) 주어진 데이터를 이용해 달 궤도의 이심률(eccentricity, e)을 추정하시오. 4
- (D2.4) 달의 각 크기(θ_{Moon})를 이용하여 지구의 본영(umbra)의 각 크기(θ_{umbra}) 단위로 나타내시오. 답안지(Summary Answersheet)의 뒷면 달 그림에 이 값을 구하기 위한 과정을 보이시오. 8
- (D2.5) 월식이 일어난 날, 그림과 같이 태양 크기로 인해 지구를 빗겨가는 빛 줄기 간에 생겨난 각은 $\theta_{\text{Sun}} = 1915.0''$ 이다. 아래 그림의 S_1R_1 과 S_2R_2 는 태양 표면의 양 끝에서 온 빛이 지나가는 선을 그린 것이다(그림의 크기와 실제 크기는 비례하지 않는다). 9
- The diagram shows a large circle labeled 'Earth' and a smaller circle labeled 'Moon' to its left. Two lines, S_1 and S_2 , originate from the right side, representing the Sun. They pass the Earth, creating an umbra (inner shadow) bounded by lines R_1 and R_2 , and a penumbra (outer shadow) bounded by lines S_1 and S_2 . The angle between the lines S_1 and S_2 at the Earth's surface is labeled θ_{Sun} .
- 반영(penumbra)의 각 크기 $\theta_{\text{penum bra}}$ 를 달의 각 크기 θ_{Moon} 단위로 나타내시오. 단, 관측자는 지구의 중앙에 위치한다고 가정한다.
- (D2.6) 달의 중앙에서 본 지구의 각 크기를 θ_{Earth} 라고 가정한다. 식이 있는 날 지구 중심에서 본 달의 각 크기 θ_{Moon} 를 지구의 각 크기 θ_{Earth} 단위로 나타내시오. 5
- (D2.7) 위의 결과를 이용하여 달의 반경 R_{Moon} 을 km 단위로 나타내시오. 3
- (D2.8) 달의 근지점 거리 r_{perigee} 와 원지점 거리 r_{apogee} 를 구하시오. 4
- (D2.9) 9월 10일의 데이터를 이용하여, 태양-지구의 거리(d_{Sun})를 구하시오 10

(D3) IA형 초신성(Type IA Supernovae)

Type Ia(Ia형) 초신성은 먼 외부은하 거리 측정에 매우 중요한 천체이다. 이들의 폭발에 의해 밝아졌다가 어두워짐을 보여주는 전형적인 광도곡선으로부터, Type Ia 초신성임을 확인할 수 있다.

Type Ia 초신성의 광도곡선은 규격을 적절하게 조절하면 이상적인 모형에 잘 들어맞는다. 이를 위하여 관측된 모든 시간간격 Δt_{obs} 에 대해 우주론적 보정(길이의 연장)을 $(1 + z)$ 배 해 줌으로써, 소속 은하를 기준계로 하는 광도곡선을 얻게 된다. 이 소속은하의 기준계에서의 시간 간격은 Δt_{gal} 로 나타낸다.

정지계의 초신성 광도곡선은 최대값 이후로 Δt_0 시간동안 최대값에 대해 2 등급 변한다. 만일 시간간격을 s 배 늘려서 (즉 $\Delta t_s = s\Delta t_{\text{gal}}$) 모든 초신성에 대해서 Δt_0 의 규격값이 같아지도록 한다면, 광도곡선은 똑 같은 모양으로 나타난다. 또한 s 는 초신성의 최고 광도에서의 절대등급 (M_{peak})과 선형적 관계를 가지는 것으로 밝혀졌다. 즉,

$$s = a + bM_{\text{peak}},$$

여기에서 a 와 b 는 상수이다. 규격인자를 알면 이 선형 방정식을 이용해서 알려진 거리에 있는 초신성의 절대등급을 결정할 수 있다

아래의 테이블에는 처음 두 초신성에 대한 거리 공식 ($m - M$)과 관련된 μ 를 포함해서, 세 초신성에 대해 후퇴속도 cz , 실시등급 m_{obs} 등이 여러 시간에 대해 주어졌다. 시간 $\Delta t_{\text{obs}} \equiv t - t_{\text{peak}}$ 는 각각의 초신성이 최고 밝기에 다다른 이후의 경과일수를 나타낸다. 관측된 밝기는 성간 및 대기 소광을 보정한 관측값이다.

Name	SN2006TD	SN2006IS	SN2005LZ
μ (mag)	34.27	35.64	
cz (km s ⁻¹)	4515	9426	12060
Δt_{obs} (days)	m_{obs} (mag)	m_{obs} (mag)	m_{obs} (mag)
-15.00	19.41	18.35	20.18
-10.00	17.48	17.26	18.79
-5.00	16.12	16.42	17.85
0.00	15.74	16.17	17.58
5.00	16.06	16.41	17.72
10.00	16.72	16.82	18.24
15.00	17.53	17.37	18.98
20.00	18.08	17.91	19.62
25.00	18.43	18.39	20.16
30.00	18.64	18.73	20.48

(D3.1) 위의 3개 초신성 모두에 대해서 Δt_{gal} 을 계산하고, 요약 답안지(Summary Answersheet) 15 뒤에 있는 빈 박스에 적어 넣으시오. 그래프 종이에 이 점들을 표시하고, 정지계에서의 3개의 광도곡선을 그리시오 (그래프에 “D3.1”이라고 표시한다).

(D3.2) 초신성 SN2006IS에 대해 규격인자 s_2 를 1.00으로 적용한다. 두 개의 다른 초신성 5 SN2006TD, SN2005LG에 대해 Δt_0 를 계산하고, 규격인자 s_1 과 s_3 를 계산하시오

- (D3.3) 이들 3개의 초신성에 대한 규격시간의 차이 Δt_s 를 계산하시오. 요약 답안지에 있는 14
같은 자료 테이블에 Δt_s 값을 적어 넣으시오. 또 다른 그래프 용지에 점들을 찍고,
광도곡선들이 같은 모양인지를 밝히기 위해 3개의 광도곡선을 모두 그리시오.
(그래프에 “D3.3” 이라고 표시)
- (D3.4) SN2006TD의 최고 밝기 절대등급(absolute magnitude at peak brightness) $M_{\text{peak},1}$ 와 6
SN20061S의 최고 밝기 절대등급 $M_{\text{peak},2}$ 를 계산하시오. 이 계산에서 a 와 b 를
이용하시오.
- (D3.5) SN2005LZ의 최고 밝기 절대등급(absolute magnitude at peak brightness) $M_{\text{peak},3}$ 과 4
거리지수 μ_3 을 계산하시오.
- (D3.6) 허블 상수 H_0 를 추정하기 위해 거리지수 μ_3 를 이용하시오. 그리고, 우주의 고유 나이 6
 T_H 를 구하시오..