(D1) **Binary Pulsar**

จากการสำรวจและศึกษาในหลายทศวรรษที่ผ่านมา นักดาราศาสตร์ได้ค้นพบพัลซาร์คาบสั้น (คาบของการหมุนรอบตัวเองน้อยกว่า 10 ms) หรือที่เรียกว่า Millisecond pulsars จำนวนมาก นอกจากนั้นเรายังพบอีกว่าพัลซาร์คาบสั้นเหล่านี้ส่วนใหญ่อยู่ในระบบดาวคู่ซึ่งมีวงโคจรเกือบเป็นวงกลม

สำหรับพัลซาร์ในวงโคจรดาวคู่ คาบการหมุน (P) และความเร่งในแนวเล็ง (a) ของพัลซาร์ที่วัดได้จะเปลี่ยนแปลงไปด้วยกันตามการเคลื่อนที่ของพัลซาร์ในวงโคจร สำหรับวงโคจรแบบวงกลม การเปลี่ยนแปลงของคาบและความเร่งสามารถเขียนในรูปฟังก์ชันของเฟสวงโคจร ϕ $(0 \leq \phi \leq 2\pi)$ ได้ตามสมการ

$$P(\phi) = P_0 + P_{\mathrm{t}}\, cos\phi \quad \text{โดยที่} \quad P_t = \frac{2\pi P_0 r}{c P_{\mathrm{B}}}$$

$$a(\phi) = -a_{\mathrm{t}} sin\phi \quad \text{โดยที่} \quad a_{\mathrm{t}} = \frac{4\pi^2 r}{P_{\mathrm{B}}^2}$$

เมื่อ P_{B} คือคาบการโคจรของพัลซาร์ในระบบดาวคู่ P_0 คือคาบการหมุนรอบตัวเองของพัลซาร์ และ r คือรัศมีของวงโคจร

ตารางด้านล่างให้ค่าจากการวัด P และ a ณ เวลาต่างๆกัน, T, อ้างอิงตามกรอบเวลาของระบบสุริยะในหน่วยของ “truncated Modified Julian Days” (tMJD) หรือเท่ากับจำนวนวันหลังจาก MJD=2,440,000

No.	T (tMJD)	P (μs)	a (m s^{-2})
1	5740.654	7587.8889	- 0.92 ± 0.08
2	5740.703	7587.8334	- 0.24 ± 0.08
3	5746.100	7588.4100	- 1.68 ± 0.04
4	5746.675	7588.5810	+ 1.67 ± 0.06
5	5981.811	7587.8836	+ 0.72 ± 0.06
6	5983.932	7587.8552	- 0.44 ± 0.08
7	6005.893	7589.1029	+ 0.52 ± 0.08
8	6040.857	7589.1350	+ 0.00 ± 0.04
9	6335.904	7589.1358	+ 0.00 ± 0.02

ถ้าหากเราวาดกราฟระหว่าง $a(\phi)$ และ $P(\phi)$ เราจะได้เส้นโค้ง จากความสัมพันธ์ที่ให้ข้างต้นจะเห็นได้ว่ากราฟที่ได้ควรเป็นรูปวงรีในระนาบของคาบและความเร่ง

สำหรับปัญหาในข้อนี้ เราจะทำการประมาณคาบการหมุนของพัลซาร์ $P(\phi)$ คาบการโคจร P_{B} และรัศมีวงโคจร r โดยวิเคราะห์ชุดข้อมูลที่ให้มา และให้สมมุติว่าวงโคจรของพัลซาร์ในระบบดาวคู่เป็นวงกลม

(D1.1) จงพล็อตกราฟของจุดข้อมูลระหว่างคาบและความเร่ง พร้อมทั้งแสดง error bar (ให้เขียนหมายเลข “D1.1” กำกับกราฟ) **7**

(D1.2) วาดวงรีที่นักเรียนคิดว่าเป็นแบบจำลองที่ดีที่สุด (best fit) ของกราฟข้อมูลที่วาดในข้อ D1.1 **2**

(D1.3) จากกราฟในข้อที่แล้ว จงประมาณค่า $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{P_t}$ และ $\mathrm{a_t}$ รวมทั้งประมาณค่าความคลาดเคลื่อน **7**

(D1.4) จงเขียนสมการสำหรับ $\mathrm{P_B}$ และ r ในรูปของ $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{P_t}$, $\mathrm{a_t}$ **4**

(D1.5) จงคำนวณค่าโดยประมาณของ $\mathrm{P_B}$ และ r โดยใช้ค่าที่วัดได้ในข้อ D1.3 รวมทั้งประมาณค่าความคลาดเคลื่อน **6**

(D1.6) จงคำนวณเฟสของวงโคจร ϕ ณ เวลาที่ทำการเก็บข้อมูลที่แสดงในตาราง จุดที่ 1, 4, 6, 8 และ 9 **4**

(D1.7) จงคำนวณคาบวงโคจร P_B แบบแม่นยำใหม่ ใช้ผลจากข้อ D1.6 โดยทำตามขั้นตอนต่อไปนี้

(D1.7a) เริ่มต้นด้วยการหาเวลา T_0 ซึ่งเป็นเวลาที่เฟสวงโคจรใกล้เคียงศูนย์มากที่สุดก่อนการเก็บข้อมูลครั้งที่ 1 **2**

(D1.7b) เวลาของการสังเกต T_calc สำหรับเฟสวงโคจรใดๆ สามารถคำนวณได้จาก **7**

$$T_\mathrm{calc} = T_0 + \left(n + \frac{\phi}{360°}\right) P_\mathrm{B},$$

เมื่อ n คือจำนวนรอบของการโคจรที่ผ่านไปแล้วระหว่างเวลา T_0 และ T (หรือ T_calc) ใดๆ จงหาค่า n และ T_calc สำหรับการเก็บข้อมูลทั้งห้าครั้งที่กล่าวถึงในข้อ D1.6 พร้อมทั้งคำนวณค่าความต่าง, $T_\mathrm{O-C}$, ระหว่างเวลาที่ทำการสังเกตการณ์ T และ T_calc เขียนคำตอบลงในตารางที่ให้มาในกระดาษสรุปคำตอบ “Summary Answersheet”

(D1.7c) วาดกราฟระหว่าง $T_\mathrm{O-C}$ และ n (เขียนกำกับกราฟเป็น “D1.7”) **4**

(D1.7d) จากกราฟ จงหาเวลาเริ่มต้นการสังเกตการณ์แบบแม่นยำ, $T_\mathrm{0,r}$, และคาบวงโคจรแบบแม่นยำ, $P_\mathrm{B,r}$ **7**

(D2) Distance to the Moon

ตารางด้านล่างนี้แสดงตำแหน่งของดวงจันทร์ในเดือนกันยายน 2015 โดยคิดเทียบกับผู้สังเกตอยู่ที่ใจกลางโลก (geocentric) ค่าในแต่ละวันถูกบันทึกที่เวลา 00:00 UT

Date	R.A. (α)			Dec. (δ)			Angular Size (θ)	Phase (ϕ)	Elongation Of Moon
	h	m	s	°	'	"	"		
Sep 01	0	36	46.02	3	6	16.8	1991.2	0.927	148.6° W
Sep 02	1	33	51.34	7	32	26.1	1974.0	0.852	134.7° W
Sep 03	2	30	45.03	11	25	31.1	1950.7	0.759	121.1° W
Sep 04	3	27	28.48	14	32	4.3	1923.9	0.655	107.9° W
Sep 05	4	23	52.28	16	43	18.2	1896.3	0.546	95.2° W
Sep 06	5	19	37.25	17	55	4.4	1869.8	0.438	82.8° W
Sep 07	6	14	19.23	18	7	26.6	1845.5	0.336	70.7° W
Sep 08	7	7	35.58	17	23	55.6	1824.3	0.243	59.0° W
Sep 09	7	59	11.04	15	50	33.0	1806.5	0.163	47.5° W
Sep 10	8	49	0.93	13	34	55.6	1792.0	0.097	36.2° W
Sep 11	9	37	11.42	10	45	27.7	1780.6	0.047	25.1° W
Sep 12	10	23	57.77	7	30	47.7	1772.2	0.015	14.1° W
Sep 13	11	9	41.86	3	59	28.8	1766.5	0.001	3.3° W
Sep 14	11	54	49.80	0	19	50.2	1763.7	0.005	7.8° E
Sep 15	12	39	50.01	-3	20	3.7	1763.8	0.026	18.6° E
Sep 16	13	25	11.64	-6	52	18.8	1767.0	0.065	29.5° E
Sep 17	14	11	23.13	-10	9	4.4	1773.8	0.120	40.4° E
Sep 18	14	58	50.47	-13	2	24.7	1784.6	0.189	51.4° E
Sep 19	15	47	54.94	-15	24	14.6	1799.6	0.270	62.5° E
Sep 20	16	38	50.31	-17	6	22.8	1819.1	0.363	73.9° E
Sep 21	17	31	40.04	-18	0	52.3	1843.0	0.463	85.6° E
Sep 22	18	26	15.63	-18	0	41.7	1870.6	0.567	97.6° E
Sep 23	19	22	17.51	-17	0	50.6	1900.9	0.672	110.0° E
Sep 24	20	19	19.45	-14	59	38.0	1931.9	0.772	122.8° E
Sep 25	21	16	55.43	-11	59	59.6	1961.1	0.861	136.2° E
Sep 26	22	14	46.33	-8	10	18.3	1985.5	0.933	150.0° E
Sep 27	23	12	43.63	-3	44	28.7	2002.0	0.981	164.0° E
Sep 28	0	10	48.32	0	58	58.2	2008.3	1.000	178.3° E
Sep 29	1	9	5.89	5	38	54.3	2003.6	0.988	167.4° W
Sep 30	2	7	39.02	9	54	16.1	1988.4	0.947	153.2° W

ภาพดวงจันทร์ที่ซ้อนทับกัน[1] ด้านล่างนี้ ถูกถ่ายที่เวลาต่างกันระหว่างจันทรุปราคา (lunar eclipse) ซึ่งเกิดขึ้นในเดือนกันยายนนี้เช่นกัน ภาพย่อยแต่ละเฟรมถูกถ่ายโดยให้จุดกลางภาพอยู่ที่กึ่งกลางของแนวเหนือใต้ของเงามืด (umbra)

สำหรับปัญหาในข้อนี้ ให้สมมุติว่าผู้สังเกตอยู่ที่จุดศูนย์กลางของโลก และขนาดเชิงมุมหมายถึงขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเชิงมุมของวัตถุหรือเงาใดๆที่สนใจ

[1] Credit: NASA's Scientific Visualization Studio

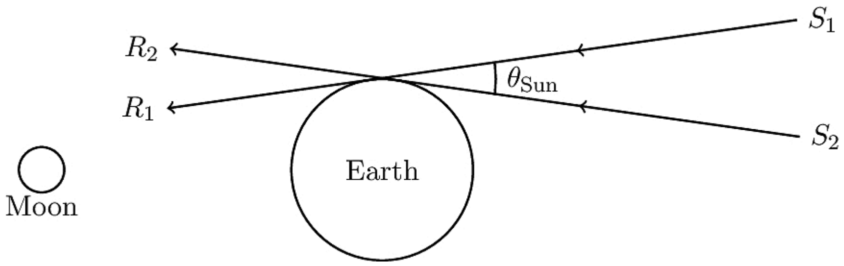
(D2.1) ให้วิเคราะห์ว่าในเดือนกันยายน 2015 จุดไกลสุด (apogee) ของวงโคจรดวงจันทร์อยู่ใกล้กับตำแหน่งใดที่สุด (ตัวเลือก: New Moon หรือ First Quarter หรือ Full Moon หรือ Third Quarter) ให้ติ๊กเลือกคำตอบที่ถูกต้องในกระดาษสรุปคำตอบ นักเรียนไม่ต้องเขียนอธิบายเหตุผล **3**

(D2.2) ให้วิเคราะห์ว่าในเดือนกันยายน 2015 นั้น ascending node ของวงโคจรดวงจันทร์เทียบกับสุริยะวิถี (ecliptic) ใกล้กับตำแหน่งใดที่สุด (ตัวเลือก: New Moon หรือ First Quarter หรือ Full Moon หรือ Third Quarter) ให้ทำเครื่องหมายเลือกคำตอบที่ถูกต้องในกระดาษสรุปคำตอบ นักเรียนไม่ต้องเขียนอธิบายเหตุผล **4**

(D2.3) จงประมาณค่าของ eccentricity e ของวงโคจรดวงจันทร์จากข้อมูลที่ให้มา **4**

(D2.4) ให้ประมาณค่าขนาดเชิงมุมของเงามืด $\theta_{\mathbf{umbra}}$ ว่าเป็นกี่เท่าของขนาดเชิงมุมของดวงจันทร์ $\theta_{\mathbf{Moon}}$ ให้แสดงวิธีหาคำตอบที่ชัดเจนบนภาพดวงจันทร์ที่ซ้อนกันซึ่งอยู่ด้านหลังของกระดาษสรุปคำตอบ **8**

(D2.5) กำหนดให้ขนาดของมุมของดวงอาทิตย์เมื่อวัดจากโลกในวันที่เกิดจันทรุปราคาเท่ากับ $\theta_{\mathbf{Sun}} = \mathbf{1915.0''}$ โดยที่รังสี S_1R_1 และ S_2R_2 ในภาพนี้มาจากด้านบนและด้านล่างที่ตรงข้ามกันของดวงอาทิตย์ (หมายเหตุ: รูปไม่ได้วาดตามสเกลที่ถูกต้อง) **9**



คำนวณหาอัตราส่วนของขนาดเชิงมุมของเงามัว $\theta_{\mathbf{penumbra}}$ ต่อขนาดเชิงมุมของดวงจันทร์ $\theta_{\mathbf{Moon}}$ โดยสมมติให้ผู้สังเกตอยู่ที่ใจกลางโลก

(D2.6) ให้ $\theta_{\mathbf{Earth}}$ เป็นขนาดเชิงมุมของโลกเมื่อวัดจากใจกลางดวงจันทร์ ให้คำนวณหาอัตราส่วนของ $\theta_{\mathbf{Moon}}$ ต่อ $\theta_{\mathbf{Earth}}$ ในวันที่เกิดจันทรุปราคา **5**

(D2.7) ให้ประมาณค่ารัศมีของดวงจันทร์ $R_{\mathbf{Moon}}$ ในหน่วยกิโลเมตร ($\mathbf{km}$) จากผลที่ได้ก่อนนี้ **3**

(D2.8) ให้ประมาณค่าระยะใกล้สุด r_{perigee} และระยะไกลสุด r_{apogee} ของดวงจันทร์ **4**

(D2.9) ให้เลือกใช้ข้อมูลของวันที่ 10 กันยายน แล้วประมาณค่าระยะทางจากโลกไปยังดวงอาทิตย์ d_{Sun} **10**

(D3) Type IA Supernova

ซุปเปอร์โนวาประเภท IA ถือเป็นเทหะวัตถุที่สำคัญในการวัดระยะทาง เนื่องจาก light curve (กราฟความสว่าง) จากการระเบิดนั้นมีการเพิ่มขึ้นและลดลงแบบมีลักษณะจำเพาะ รูปแบบของ light curve ทำให้เราสามารถจำแนกได้ว่าเป็นซุปเปอร์โนวาแบบ IA หรือไม่

เราสามารถสเกลกราฟ light curve ของซุปเปอร์โนวาประเภท IA ทั้งหมดให้มีรูปแบบที่เหมือนกันได้ ในการสเกลนั้น เราต้องหาความรูปแบบของ light curve ในกรอบนิ่งของกาแล็กซีที่เกิดการระเบิดของซุปเปอร์วาเสียก่อน โดยการกำจัดเฟคเตอร์ $(1+z)$ ออกไปจากเวลาของการสังเกตการณ์ Δt_{obs} (เฟคเตอร์นี้ฝังอยู่ในเวลาของการสังเกตการณ์เนื่องจากการขยายตัวของเอกภพ หรือ cosmological stretching) ช่วงเวลาใหม่ที่ได้จะเป็นช่วงเวลาที่วัดในเฟรมนิ่งของกาแล็กซีนั้น หรือ Δt_{gal}

กำหนดให้ Δt_0 เป็นช่วงเวลาที่ความสว่างของซุปเปอร์โนวาลดลง 2 magnitude จากความสว่างสูงสุดเมื่อวัดในเฟรมนิ่ง เราสามารถสเกลช่วงเวลาเพิ่มเติมด้วยเฟคเตอร์ s (หรือ $\Delta t_s = s\Delta t_{\text{gal}}$) ในลักษณะที่ส่งผลให้ซุปเปอร์โนวาทุกดวงมีค่า Δt_0 เท่ากันทั้งหมด และยังทำให้ light curve มีรูปแบบที่เหมือนกัน จากการศึกษาพบว่า s มีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับโชติมาตรสัมบูรณ์ (absolute magnitude) M_{peak} ที่ความสว่างสูงสุดของซุปเปอร์โนวา ดังนั้นเราสามารถเขียนได้ว่า

$$s = a + bM_{\text{peak}}\,,$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว ถ้าเราสามารถหาสเกลเฟคเตอร์ได้ เราจะสามารถหาโชติมาตรสัมบูรณ์ของซุปเปอร์โนวาได้แม้จะไม่รู้ระยะห่างก็ตาม

ตารางด้านล่างแสดงข้อมูลของซุปเปอร์โนวาจำนวน 3 ดวง โดยมีข้อมูล distance moduli μ (สำหรับ 2 ดวงแรก), ความเร็วถดถอย cz และโชติมาตรปรากฏ (apparent magnitude) m_{obs} ที่เวลาต่างๆ กำหนดให้เวลา $\Delta t_{\text{obs}} \equiv t - t_{\text{peak}}$ เป็นจำนวนวันนับจากวันที่ซุปเปอร์โนวามีความสว่างสูงสุด โดยที่ magnitude นี้ได้มีการชดเชยผลจากการดูดกลืนต่างๆในเส้นทางเดินของแสงเรียบร้อยแล้ว

Name	SN2006TD	SN2006IS	SN2005LZ
μ (mag)	**34.27**	**35.64**	
cz (km s^{-1})	**4515**	**9426**	**12060**
Δt_{obs} (days)	m_{obs} (mag)	m_{obs} (mag)	m_{obs} (mag)
-15.00	19.41	18.35	20.18
-10.00	17.48	17.26	18.79
-5.00	16.12	16.42	17.85
0.00	15.74	16.17	17.58
5.00	16.06	16.41	17.72
10.00	16.72	16.82	18.24
15.00	17.53	17.37	18.98
20.00	18.08	17.91	19.62
25.00	18.43	18.39	20.16
30.00	18.64	18.73	20.48

(D3.1) คำนวณค่า Δt_{gal} สำหรับซุปเปอร์โนวาทั้ง 3 ดวง แล้วกรอกลงในตารางที่กำหนดให้ด้านหลังของกระดาษสรุปคำตอบ ให้พล็อตกราฟและวาดเส้น light curve ของซุปเปอร์โนวาทั้ง 3 ดวงในเฟรมนิ่งนี้ ให้เขียน “D3.1” กำกับบนกระดาษกราฟ **15**

(D3.2) กำหนดให้สเกลเฟคเตอร์ของซุปเปอร์โนวา SN2006IS มีค่าเท่ากับ $s_2 = 1.00$ จงหาค่าของ Δt_0 หลังจากนั้นหาค่าของ s_1 และ s_3 ของซุปเปอร์โนวาสองดวงที่เหลือ คือ SN2006TD และ SN2005LZ ตามลำดับ **5**

(D3.3) จงคำนวณ Δt_{s} ของซุปเปอร์โนวาทั้ง 3 ดวง เขียนคำตอบที่ได้ลงในตารางเดิมในกระดาษสรุปคำตอบ แล้วใช้กระดาษกราฟอีกแผ่นหนึ่งพล็อตจุดและวาดเส้น light curve ของซุปเปอร์โนวาทั้ง 3 ดวง ซึ่ง light curve ที่ได้ควรมีรูปแบบที่เหมือนกันมาก ให้เขียน “D3.3” กำกับบนกระดาษกราฟ **14**

(D3.4) ให้คำนวณหาโชติมาตรสัมบูรณ์ที่ความสว่างสูงสุด $M_{\text{peak,1}}$ ของ SN2006TD และคำนวณหา $M_{\text{peak,2}}$ ของ SN2006IS หลังจากนั้นใช้ค่าที่ได้คำนวณหา a และ b **6**

(D3.5) คำนวณหาโชติมาตรสัมบูรณ์ที่ความสว่างสูงสุด $M_{\text{peak,3}}$ ของ SN2005LZ แล้วคำนวณหา distance modulus μ_3 **4**

(D3.6) ใช้ค่า distance moduli μ_3 ที่ได้ประมาณค่าคงตัวฮับเบิล H_0 แล้วประมาณอายุของเอกภพ T_{H} **6**