

**(T1) Верно или неверно**

Определите, какое из следующих утверждений верно или неверно. В листе ответа отметьте галочкой правильный ответ (ВЕРНО/НЕВЕРНО) для каждого утверждения. Для этих заданий разъяснения не нужны. 2

(T1.1) Будет ли голубым безоблачное небо на фотографии полной Луны, сделанной ночью, с достаточно длительной экспозицией. 2

(T1.2) Астроном в Бхубанешваре каждый день в течение года отмечает положение Солнца в 05:00 UT. Если ось вращения Земли была бы перпендикулярна плоскости ее орбиты, то эти положения перемещались бы по дуге большого круга. 2

(T1.3) Если период обращения некоторого малого тела вокруг Солнца меньше орбитального периода обращения Урана, то его орбита обязательно полностью должна быть внутри орбиты Урана. 2

(T1.4) . Центр масс Солнечной системы всегда внутри Солнца. 2

(T1.5) Фотон движется в свободном пространстве. Вследствие расширения Вселенной его импульс уменьшается. 2

**(T2) Газы на Титане**

Частицы газа в атмосфере планеты имеют широкое распределение скоростей. Если средняя квадратичная скорость теплового движения частиц газа достигает  $1/6$  скорости убегания, то их большая часть покинет планету. Каков минимальный атомный вес (в атомных единицах массы) частиц газа, оставшихся в атмосфере Титана? 10

Дано: масса Титана  $M_T = 1.23 \times 10^{23}$  kg, радиус Титана  $R_T = 2575$  km, температура поверхности Титана  $T_T = 93.7$  K.

**(T3) Ранняя Вселенная**

В космологических моделях плотность энергии излучения  $\rho_r$  Вселенной пропорциональна  $(1+z)^4$ , а плотность энергии вещества  $\rho_m$  пропорциональна  $(1+z)^3$ , где  $z$  – красное смещение. Безразмерный параметр плотности  $\Omega$  задан как  $\Omega = \rho/\rho_c$ , где  $\rho_c$  – критическая плотность энергии Вселенной. В современной Вселенной параметры плотности для излучения и материи равны  $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$  and  $\Omega_{m_0} = 0.3$ , соответственно.

(T3.1) Рассчитайте красное смещение  $z_e$ , которое соответствует равенству плотностей энергий излучения и вещества. 3

(T3.2) Приняв спектр излучения пришедшего к нам от ранней Вселенной чернотельным, с пиком, соответствующим температуре 2.732 K, оцените  $T_e$  излучения при красном смещении  $z_e$ . 4

(T3.3) Оцените типичную энергию фотона  $E_\nu$  (в eV), излученного при красном смещении  $z_e$ .

**(T4) Тени**

Наблюдатель в Северном полушарии в один и тот же день измерил самую длинную и самую короткую тени от вертикального кола высотой 1.000m. Они оказались равными 5.671m и 1.732m соответственно. 10

Определите географическую широту места наблюдения и склонение Солнца во время измерений, считая его постоянным. Считаем Солнце точечным источником, рефракции нет.

**(T5) Транзит через луч GMRT**

GMRT расположен на широте  $19^\circ 6' N$ , и долготе  $74^\circ 3' E$ . GMRT состоит из 30 тарелок, каждая из которых имеет диаметр 45.0 m. Одна из этих тарелок направлена вдоль северного меридиана в точку с зенитным расстоянием  $39^\circ 42'$ . Тарелка фиксирует прохождение точечного источника радиоизлучения через диаметр ее луча, при пересечении источником меридиана. 10

Каково время транзита источника через полуширину луча нашей тарелки, если его излучение имеет частоту 200 MHz?

**Подсказка:** Угловой размер полуширины луча соответствует угловому разрешению круглой тарелки на этой частоте.

(T6) **Пульсации цефеид**

Звезда  $\beta$ -Doradus - это цефеида с периодом пульсации 9.84 days. Для упрощения считаем, что ее яркость максимальна при минимальном размере (радиус  $R_1$ ) и минимальна при максимальном (радиус  $R_2$ ).

Звезда все время сферическая и излучает как абсолютно черное тело. Болометрическая видимая звездная величина изменяется от 3.46 до 4.08. Модуль средней радиальной скорости сжатия или расширения поверхности цефеиды  $12.8 \text{ km s}^{-1}$ . Во время полной пульсации максимум излучения изменяется от 531.0 nm до 649.1 nm.

(T6.1) Найдите отношение максимального и минимального радиусов звезды ( $R_1/R_2$ ). 7

(T6.2) Определите максимальный и минимальный радиусы звезды (в метрах) ( $R_1$  and  $R_2$ ). 3

(T6.3) Рассчитайте поток излучения от звезды  $F_2$ , когда ее радиус максимален. 5

(T6.4) Определите расстояние до звезды  $D_{\text{star}}$  в парсеках. 5

(T7) **Оптика телескопа**

Фокусное отношение идеального телескопа рефрактора  $f/5$ , фокусное расстояние объектива 100 cm, а окуляра 1 cm. 4

(T7.1) Чему равно угловое увеличение телескопа  $m_0$ ? Чему равна длины трубы телескопа, то есть расстояние между объективом и окуляром?

Установка линзы Барлоу между объективом и окуляром позволяет повысить увеличение телескопа без существенного изменения его длины. При установке линзы Барлоу с фокусным расстоянием 1 cm наш телескоп увеличивает в два раза сильнее

(T7.2) На каком расстоянии от фокуса объектива надо расположить линзу Барлоу, чтобы получить желаемое двойное увеличение. 6

(T7.3) Каково при этом увеличение длины телескопа  $\Delta L$ ? 4

Пусть наш телескоп состоит из того же объектива и CCD детектора, расположенного в его фокусе (без линзы Барлоу и окуляра). Размеры каждого пикселя в CCD детекторе 10  $\mu\text{m}$ .

(T7.4) Сколько пикселей между центрами изображений двух звезд в CCD, разделенных на небе угловым расстоянием  $20''$ ? 6

(T8) **U-Band фотометрия**

Фильтр U-полосы идеальный, он пропускает все в своей полосе (100%), и ничего не пропускает вне ее (0%). Центр полосы пропускания 360 nm, ее ширина 80 nm. Звезда также испускает на этой частоте плоский спектр. Спектральную плотность потока излучения рассчитываем, зная видимую звездную величину по формуле Jansky

$$(1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2})$$

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy}$$

(T8.1) Сколько фотонов в U-полосе  $N_0$ , попадает на  $1 \text{ m}^2$  поверхности атмосферы Земли каждую секунду. 8

Звезду наблюдают с помощью телескопа, расположенного на поверхности Земли, диаметр зеркала которого 2.0 m. Атмосферное поглощение в U-полосе во время наблюдения 50%. Видимость ограничена дифракцией. Поверхностная яркость неба в U-полосе  $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$ .

(T8.2) Чему равно отношение R чисел фотонов от звезды и от куска неба диаметром  $2''$ ? 8

(T8.3) На практике только 20% от падающих на зеркало фотонов детектируется. Сколькo фотонов  $N_t$ , детектируется за одну секунду. 4

**(T9) Миссия облета Марса**

Сухая масса корабля 500 kg, масса топлива 852 kg. Он расположен на эллиптической орбите с высотой в перигее 264.1 km и в апогее 23903.6 km, После шестикратного повышения орбиты корабль достигнет орбиты Марса по энергосберегающей орбите.

В перигее кратковременно включается двигатель, который сообщает кораблю импульс  $1.73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$ . Изменением массы корабля при сгорании топлива пренебречь. 14

(T9.1) Какова высота  $h_a$  над поверхностью Земли корабля в последующем, после первого включения двигателя, апогее. 6

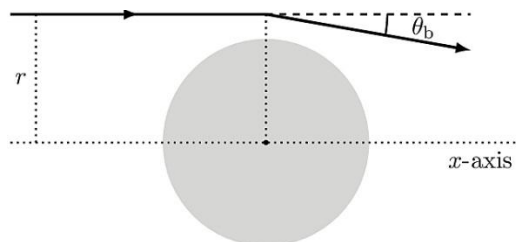
(T9.2) Рассчитайте эксцентриситет новой орбиты после первого включения двигателя и соответствующий орбитальный период.

**(T10) Гравитационное линзирование**

Общая теория относительности дает формулу для угла отклонения при прохождении света у массивного тела

$$\theta_b = \frac{2R_{sch}}{r}$$

где  $R_{sch}$  – радиус Шварцшильда, прицельное расстояние  $r$ , ось  $x$  проходит через центр гравитационной массы.



Параллельные лучи, приходящие из бесконечности фокусируются на расстоянии  $f_r$  от центра массивного тела, которое работает как телескоп

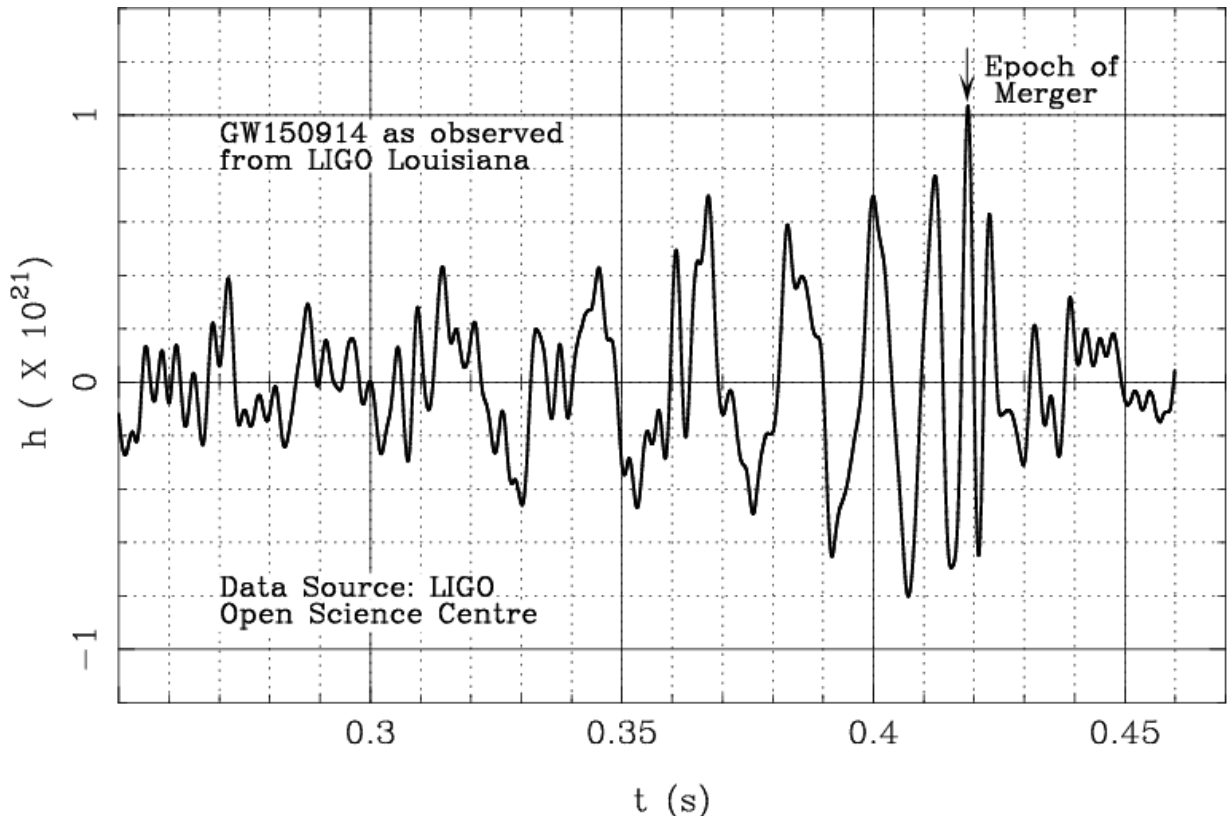
(T10.1) Найдите  $f_{min}$ , для Солнца, считая его гравитационной линзой, в астрономических единицах. 6

(T10.2) Рассмотрим круговой детектор, расположенный на расстоянии  $f_{min}$  перпендикулярно оси  $x$ , такой, что в него попадают лучи от кольца, толщиной  $h \ll R_{\odot}$ , проходящие вблизи поверхности Солнца. Каково увеличение потока излучения этим телескопом. 6

(T10.3) Представим сферически симметричное скопление галактик. Каково должно быть распределение массы  $M(r)$  в нем для того, чтобы все параллельные световые лучи, проходящие сквозь него, собирались в одной точке.

**(T11) Гравитационные волны**

Первый сигнал гравитационных волн был получен детекторами в Ханфорде и Ливингстоне в США в сентябре 2015 года. Одно из этих измерений (деформация приемника от времени в секундах) показано на рисунке. В этой задаче мы интерпретируем источник этого сигнал как пробную массу  $m$ , вращающуюся вокруг большой массы  $M$  ( $m \ll M$ ), путем рассмотрения нескольких моделей.



Пробная масса теряет энергию вследствие излучения гравитационных волн. В результате ее орбита сжимается, и пробное тело достигает поверхности объекта, или в случае черной дыры самой близкой стабильной круговой орбиты - ISCO – которая определена  $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{sch}}$ , где  $R_{\text{sch}}$  – радиус Шварцшильда черной дыры. Это “эпоха слияния”, отмеченная на рисунке. В этой точке амплитуда гравитационной волны максимальна и ее частота вдвое больше частоты обращения. В данной задаче мы рассмотрим гравитационные волны перед эпохой слияния, когда предположительно выполняются законы Кеплера. После слияния форма гравитационных волн изменяется при их затухании.

(T11.1) Рассмотрим наблюдаемые гравитационные волны, показанные на рисунке выше. Оцените период времени  $T_0$  и, следовательно, частоту  $f_0$ , непосредственно перед эпохой слияния.

(T11.2) Для некоторой звезды главной последовательности, радиус  $R_{\text{MS}}$  и масса  $M_{\text{MS}}$ , выполняется зависимость

$$R_{\text{MS}} \propto M_{\text{MS}}^\alpha$$

where  $\alpha = 0.8$  for  $M_\odot < M_{\text{MS}}$   
 $\alpha = 1.0$  for  $0.08M_\odot \leq M_{\text{MS}} \leq M_\odot$

Для этого случая напишите зависимость максимальной частоты гравитационной волны  $f_{\text{MS}}$ , от массы звезды в единицах массы Солнца ( $M_{\text{MS}}/M_\odot$ ) и  $\alpha$ .

(T11.3) Используя полученный выше результат, определите значение  $\alpha$  которая даст максимально возможную частоту гравитационной волны  $f_{MS,max}$  для звезды главной последовательности. Рассчитайте эту частоту.

(T11.4) Белый карлик (WD) имеет максимальную массу  $1.44 M_{\odot}$  (предел Чандрасекара) и зависимость масса-радиус  $R \propto M^{-1/3}$ . Радиус белого карлика солнечной массы равен 6000 km. Найдите максимальную частоту  $f_{WD,max}$  излучаемых гравитационных волн, если пробная масса вращается вокруг белого карлика. 8

(T11.5) Нейтронные звезды (NS) – это компактные объекты, масса которых лежит между  $1$  и  $3M_{\odot}$  и радиус в пределах  $10 - 15$  km. Найдите диапазон частот излучаемых гравитационных волн  $f_{NS,min}$  и  $f_{NS,max}$ , если пробная масса вращается вокруг нейтронной звезды вблизи ее поверхности. 8

(T11.6) Если пробная масса вращается вокруг черной дыры (BH), напишите выражение для частоты излучаемых гравитационных волн  $f_{BH}$ , в зависимости от массы черной дыры  $M_{BH}$ , и массы Солнца  $M_{\odot}$ . 7

(T11.7) Основываясь только на периоде (частоте) гравитационной волны перед эпохой слияния, определите, мог ли быть центральный объект звездой главной последовательности (MS), белым карликом (WD), нейтронной звездой (NS) или черной дырой (BH). Отметьте правильный ответ в листе ответов. Оцените массу этого объекта в массах Солнца  $M_{obj}$ , в единицах  $M_{\odot}$ . 5

**(T12) Экзопланеты**

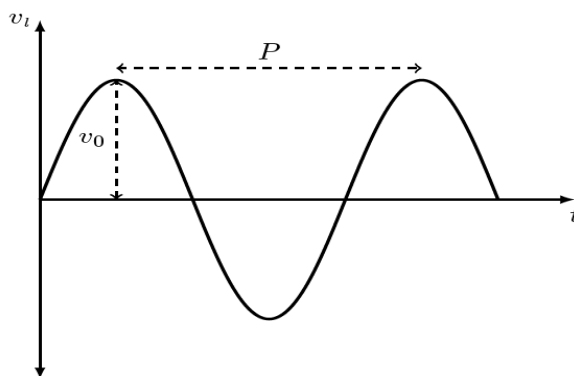
Существуют два метода детектирования экзопланет (планет у других звезд): метод измерения лучевых скоростей (колебаний) и метод транзита. В этой задаче мы объединим их оба для получения большей информации о планетах и их звездах.

В этой задаче мы рассматриваем планету массы  $M_p$  и радиуса  $R_p$ , которая движется по круговой орбите радиуса  $a$  вокруг звезды массы  $M_s$ ,  $M_s \gg M_p$  и радиуса  $R_s$ . Нормаль к плоскости орбиты наклонена к лучу зрения под углом  $i = 90^\circ$ . Мы считаем, что эта планета у звезды единственная и  $R_s \ll a$ .

**Метод колебаний**

При движении звезды и планеты вокруг их центра масс звезда будет совершать колебания относительно барицентра системы. В результате в излучении звезды будет Доплеровское смещение, зависящее от скорости колебаний.

На графике приведена зависимость радиальной скорости звезды  $v_l$  от времени  $t$ , и обозначен период ее обращения  $P$  вокруг барицентра. Максимальное значение радиальной составляющей скорости звезды  $v_0$ .



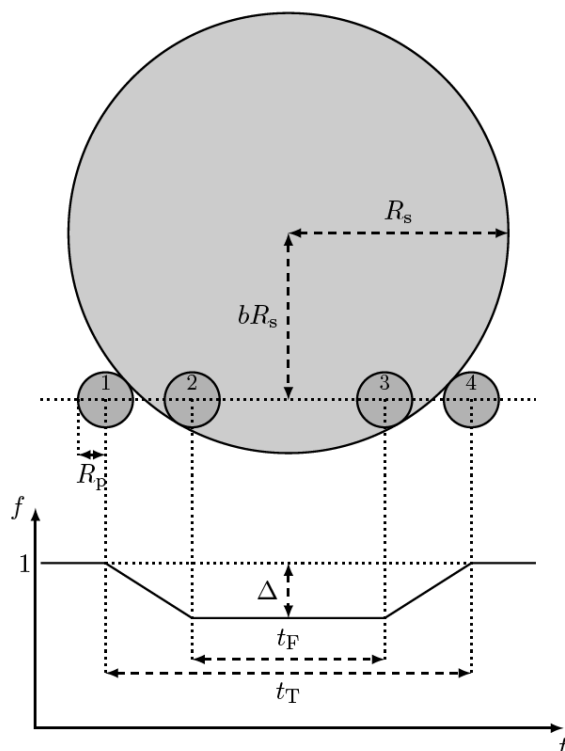
$P$ . (T12.1) Выразите орбитальный радиус ( $a$ ) и орбитальную скорость ( $v_p$ ) планеты через  $M_s$  и 3

(T12.2) Выразите нижний предел массы планеты  $M_{p,\min}$  через  $M_s$ ,  $v_0$  и  $v_p$ . 4

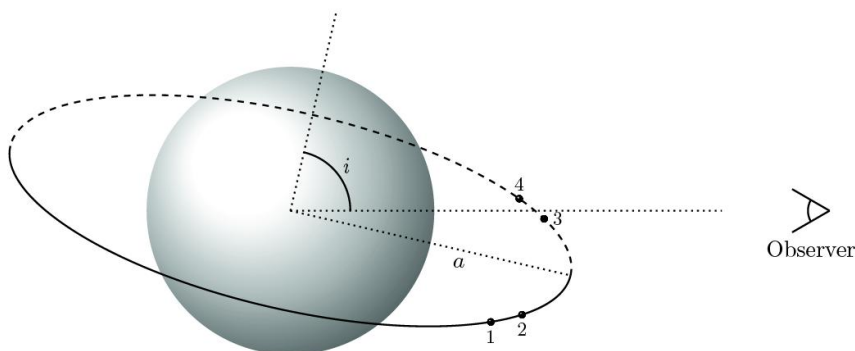
**Метод транзита:**

Если планета вращается вокруг своей звезды по орбите с наклоном ( $i \approx 90^\circ$ ), она периодически проходит перед диском звезды, что отмечается наблюдателем. При этом поток излучения от звезды несколько уменьшается. Это, не в масштабе, изображено на диаграмме внизу, вместе с графиком зависимости потока излучения  $f$  от звезды от времени  $t$  для однородно светящегося звездного диска.

Если наклонение точно  $90^\circ$ , то планета проходит по диаметру звездного диска. Для других значений  $i$  – вдоль хорд, центры которых, как показано, лежат на расстоянии  $bR_s$  от центра солнечного диска. Поток от звезды без покрытия ее планетой принять за 1 и максимальное уменьшение потока излучения обозначено  $\Delta$ .



Четыре важные точки транзита называются первым, вторым, третьим и четвертым контактом, и обозначены положениями от 1 до 4 соответственно на рисунке сверху. Интервал времени между вторым и третьим контактом обозначен  $t_F$ , когда диск планеты полностью располагается на диске звезды. Интервал времени между первым и четвертым контактом обозначен  $t_T$ . Все эти точки показаны на рисунке ниже (не в масштабе).



В рамках метода транзита измеряют  $P$ ,  $t_T$ ,  $t_F$  и  $\Delta$ .

(T12.3) Найдите зависимость  $i$  от  $R_s$  и  $a$  для транзита.

(T12.4) Выразите  $\Delta$  через  $R_s$  и  $R_p$ .

(T12.5) Выразите  $t_T$  и  $t_F$  через  $R_s$ ,  $R_p$ ,  $a$ ,  $P$  и  $b$ .

(T12.6) В приближении радиуса орбиты планеты значительно большего, чем радиус звезды, выразите параметр  $b$  через параметры, измеренные на кривой транзита.

(T12.7) Используйте результаты части (T13.6) для получения выражения для отношения  $a/R_s$  через параметры транзита, используя удобную аппроксимацию.

(T12.8) Комбинируя результаты методов колебаний и транзита определите величину плотности звезды  $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$  через  $t_T$ ,  $t_F$ ,  $\Delta$  и  $P$ .

2

1

8

5

3

6

**Каменная или газовая:**

Рассмотрим случай ( $i = 90^\circ$ ) системы звезда-планета (круговая орбита) видимая с Земли. Известно, что масса звезды  $1.00M_\odot$ . Период обращения планеты ( $P$ ) равен 50.0 days полная длительность транзита ( $t_T$ ) равна 1.00 hour. Глубина транзита ( $\Delta$ ) равна 0.0064. Такая же система наблюдается методом колебаний и имеет максимальную лучевую скорость звезды  $0.400 \text{ ms}^{-1}$ .

(T12.9) Найдите радиус орбиты планеты в AU и метрах.

(T12.10) Найдите отношение  $t_F/t_T$  для системы.

2  
8

(T12.11) Выразите массу  $M_p$  и радиус  $R_p$  планеты через массу ( $M_\oplus$ ) и радиус ( $R_\oplus$ ) Земли соответственно. Эта планета похожа на каменную или газовую? Отметьте в рамке листа ответа ROCKY или GASEOUS.

**Действительная кривая транзита:**

(T12.12) Рассмотрим транзит планеты с  $i = 90^\circ$  вокруг звезды, пятно на экваторе которой сравнимо с размером планеты  $R_p$ . Период вращения звезды  $2P$ . Изобразите транзитные кривые блеска для пяти возможных транзитов планеты. Поток выражен в независимых единицах. При первом транзите планета и пятно не накладываются друг на друга, зато это происходит во втором.

4

(T12.13) В этой задаче диск светится однородно. В действительности, наблюдается потемнение к краю. Изобразите новую кривую блеска с учетом данного обстоятельства.

2