

(T1) Вярно или грешно

Определете дали всяко едно от следващите твърдения е вярно или грешно. В бланката за отговори (Summary Answersheet) отбележете съответния отговор (TRUE / FALSE) за всяко твърдение. Не е нужно да обосновавате Вашия отговор.

- (T1.1) Ако се направи снимка на безоблачното, нощно небе, по време на Пълнолуние, то при достатъчно голяма продължителност на експонацията цветът на небето би бил син, както през деня.

2
- (T1.2) Един астроном, намиращ се Бубанешвар, отбелязва положението на Слънцето всеки ден от годината точно в 5:00 UT. Ако оста на Земята беше перпендикулярна на земната орбита, то положенията на Слънцето ще описват дъга от голям кръг.

2
- (T1.3) Орбиталният период на едно малко тяло от Слънчевата система, движещо се по елиптична орбита, е по-малък от орбиталния период на Уран. Орбитата на това тяло задължително трябва да се намира изцяло в орбитата на Уран.

2
- (T1.4) Центърът на масите на Слънчевата система се намира през цялото време вътре Слънцето.

2
- (T1.5) Един фотон се движи свободно в Космоса. Поради разширението на Вселената, големината на неговия импулс намалява с времето.

2

(T2) Атмосферата на Титан

Скоростите на частиците на газовете в планетните атмосфери са разпределени в широк диапазон от стойности. Ако средно-квадратичната топлинна скорост на частиците в някаква атмосфера надвишава $1/6$ от параболичната скорост на повърхността на планетата, то по-голямата част от газа би напуснал планетата. Каква е най-малката стойност на атомното тегло A_{\min} на идеален едноатомен газ, при която той ще остане в атмосферата на Титан?

Можете да използвате следните стойности:

- Маса на Титан: $M_T = 1.23 \times 10^{23} \text{ kg}$
- Радиус на Титан: $R_T = 2575 \text{ km}$
- Температура на повърхността на Титан: $T_T = 93.7 \text{ K}$.

(T3) Ранна Вселена

Според космологичните модели, плътността на лъчистата енергия ρ_r , във Вселената е пропорционална на $(1+z)^4$, а плътността на енергията на веществото, ρ_m , е пропорционална на $(1+z)^3$, където z е червеното отместване, съответстващо на епохата за която се отнасят тези плътности. Безразмерният параметър на плътността Ω , се дефинира като $\Omega = \rho/\rho_c$, където ρ_c е критичната стойност на плътността на енергията във Вселената. В настоящата епоха параметрите на плътността за лъчението и веществото имат стойности, съответно: $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$ и $\Omega_{m_0} = 0.3$.

- (T3.1) Пресметнете червеното отместване, z_e , което съответства на епохата в която плътностите на енергията на лъчението и веществото са били равни.

3
- (T3.2) Нека да приемем, че лъчението в ранната Вселена има спектър на абсолютно черно тяло с температура 2.723K . Оценете температурата, T_e , на лъчението, която съответства на червено отместване z_e .

4
- (T3.3) Оценете типичната стойност на енергията на един фотон E_ν (в eV), в епохата на това червено отместване z_e .

3

- (T4) **Сенки** 10
 Един наблюдател в северната полусфера на Земята забелязал, че в някакъв ден дължината на най-късата сянка на вертикален прът, с дължина **1.000 m**, е равна на **1.732 m**. В същия ден, максималната дължина на сянката на този прът е била **5.671 m**.
 Намерете географската ширина на наблюдателя ϕ и деклинацията δ_{\odot} , на Слънцето, в този ден.
 Приемете, че Слънцето е точков източник на светлина и не отчитайте рефракцията.
- (T5) **GMRT beam transit** 10
 Големият Метров Радиотелескоп (GMRT) е един от най-големите, работещи в метровия обхват радиотелескопи в света и се намира в западната част на Индия (географска ширина: **19° 6' N**, географска дължина: **74° 3' E**). GMRT се състои от 30 отделни антени, всяка от които има диаметър 45.0 m. Една от антените на GMRT е разположена така, че оста ѝ е неподвижно насочена на зенитно отстояние **39° 42'**, по меридиана на мястото, точно на север от зенита. При това положение на радиотелескопа, един точков радио-източник, докато пресича меридиана на мястото, преминава полето от което телескопът събира сигнал, пресичайки го по неговия диаметър.
 Намерете за колко време T_{transit} източникът ще пресече FWHM (full width at half maximum) на една от антените на GMRT, ако с нея се наблюдава на честота 200 MHz.
Забележка: FWHM (full width at half maximum) е на дадената честота е равна на ъгловата разделителна способност на антената.
- (T6) **Пулсации на цефеида**
 Звездата β -Doradus е цефеида, като нейният период на пулсация е **9.84 дни**. За простота, приемаме, че звездата е най-ярка, в момента в който тя е най-свита (тогава радиусът е R_1) и тя е най-слаба, когато е най-раздута (и има радиус R_2). Приемаме, също така, че по време на целия цикъл на пулсация, звездата запазва сферичната си форма и излъчването ѝ се описва със законите за излъчване на абсолютно черно тяло. Видимата болометрична звездна величина на звездата се променя от **3.46^m** до **4.08^m**. От спектрални наблюдения е известно, че средната скорост с която звездата се свива и раздува е **12.8 km/s**. По време на пулсацията дължината на вълната на максимума на излъчване, измервана в отправна система, свързана с центъра на цефеидата, се променя от **531.0 nm** до **649.1 nm**.
- (T6.1) Пресметнете отношението на радиусите на цефеидата, когато тя е максимално свита и максимално раздута (R_1/R_2). 7
- (T6.2) Пресметнете радиуса на звездата (в метри) в състоянията, в които тя е максимално свита и максимално раздута (R_1 and R_2). 3
- (T6.3) Пресметнете осветеността, F_2 , която се създава от звездата, която тя е най-раздута. 5
- (T6.4) Пресметнете разстоянието до звездата D_{star} в парсеци. 5
- (T7) **Телескоп**
 Един телескоп-рефрактор има светосила $f/5$, фокусно разстояние на обектива **100 cm** и фокусно разстояние на използвания окуляр **1 cm**.
- (T7.1) Какво е ъгловото увеличение m_0 на телескопа? Каква е дължината L_0 на тръбата на телескопа, т.е. разстоянието от обектива до окуляра? 4
- Един начин по който ъгловото увеличение на телескопа може да нарастне, без дължината на телескопа да нарастне значително, е като се постави вдлъбнатата леща (леща на Барлоу) между обектива и фокалната равнина. Една леща на Барлоу, с фокусно разстояние **1 cm**, се поставя в телескопа, като целта е неговото увеличение да нарастне два пъти.

(T7.2) На какво разстояние d_B , от главния фокус трябва да бъде поставена лещата, за да се получи желаното удвояване на ъгловото увеличение? 6

(T7.3) Какво ще бъде удължението, ΔL , на тръбата на телескопа? 4

В главния фокус на един телескоп, който има същия обектив се поставя CCD камера (лещата на Барлоу и окулярът са премахнати). Размерът на един пиксел в тази CCD камера е $10 \mu\text{m}$.

(T7.4) Какво е разстоянието n_p , в пиксели, между центровете на изображенията на двете звезди, ако те са на ъглово отстояние $20''$ на небето?

(T8) Фотометрия в U-филтър

Една звезда има видима звездна величина $m_U = 15.0$ при наблюдение във филтър U. Приемаме, че този филтър е идеален, което означава, че той е напълно прозрачен (100% прозрачност) в някакъв спектрален диапазон и напълно непрозрачен извън него (0% прозрачност). Средата на диапазона в който филтърът пропуска светлина е 360 nm , а пълната ширина на този диапазон е 80 nm . Приемаме, също така, че звездата излъчва една и съща енергия на всички честоти (има плосък спектър). Връзката между звездната величина, m , във всеки един филтър, и спектралната плътност на потока, f , на една звездна в Янски ($1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$) е следната:

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy}$$

(T8.1) Пресметнете приблизително колко фотона, N_0 , падат всяка секунда от тази звезда, върху площ 1 m^2 , ориентирана перпендикулярно на лъчите и намираща се извън атмосферата на Земята, при наблюдение във филтър U. 8

Тази звезда се наблюдава, във филтър U, с наземен телескоп, чиито диаметър на главното огледало е 2.0 m . Поглъщането на атмосферата в този филтър, по време на наблюдението, е 50% . Приемаме, че атмосферните условия са идеални. Измерено е, че средната повърхностна яркост на нощното небе във филтър U е $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$

(T8.2) Какво е отношението, R , на броят фотоните, които се получават от звездата, към тези, които са получени от нощното небе, ако се използва кръгла апертура с ъглов диаметър $2''$. 8

(T8.3) На практика, при наблюдение във филтър U, само 20% от фотоните попаднали върху главното огледало се детектират. Каква е бройката на фотоните, N_t , идващи от звездата, регистрирани за 1 секунда? 4

(T9) Мисията Mars Orbiter

Индийската космическа мисия Mars Orbiter Mission (MOM) е изстреляна с помощта на ракетата носител Polar Satellite Launch Vehicle (PSLV) на 5 Ноември 2013г. Сумарната маса (корпус+инструменти) е била 500 kg , а първоначално масата на горивото в него била 852 kg . Първоначално сондата се е движила около Земята по елиптична орбита, като в перигей тя се е намирала на височина 264.1 km над земната повърхност, а в апогей на височина 23903.6 km , над повърхността на Земята. След като сондата е направила шест обиколки по орбитата си, MOM е преминал на транс-Марсианска орбита (Хофманова орбита).

Първият тласък е бил придаден на сондата, чрез включване на двигателите за време 41.6 s в момент, когато тя е била близо до перигея на своята орбита. Тогава на нея е придаден допълнителен импулс $1.73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$. Пренебрегваме промяната в масата на сондата, поради изгарянето на горивото.

(T9.1) На каква височина над повърхността на Земята, h_a , се намира точката на апогей на новата орбита по която сондата започва да се движи? 14

(T9.2) Намерете ексцентичитета (e) на новата орбита и орбиталния период (P) на MOM в часове. 6

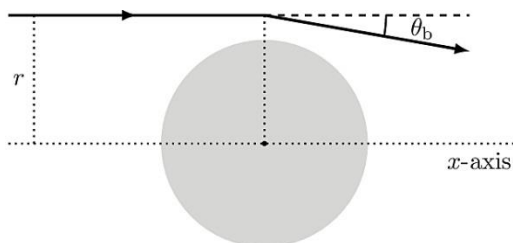
(T10) Телескоп с гравитационни лещи

Според Общата теория на относителността на Айнщайн светлината се отклонява от праволинейното си празпространение, когато преминава в близост до масивни обекти. За простота, приемаме, че светлината се отклонява под някакъв ъгъл в някаква точка, както е показано на фигурата.

Ъгълът на отклонение θ_b , се задава със следния израз:

$$\theta_b = \frac{2R_{sch}}{r}$$

където R_{sch} е радиусът на Шварцшилд на обекта, покрай който светлинният лъч преминава. Ще наричаме „прицелен параметър“ разстоянието между правата по която лъчът светлина се движи преди да взаимодейства с обекта и ос Ox , която е успоредна на тази права и преминава през центъра му.



Можем да заключим, че едно масивно тяло има поведението на фокусираща леща. Светлинните лъчи, които идват от безкрайно разстояние и имащи еднакъв прицелен параметър r , се пресичат в една точка, която се намира на оста Ox , на разстояние f_r от центъра на обекта. Ако в тази точка се намира наблюдател, то той може да наблюдава източникът на светлината с голямо увеличение, поради гравитационното ѝ фокусиране. Поради това, можем да кажем, че масивното тяло играе ролята на телескоп с гравитационна леща и усилва далечни сигнали.

(T10.1) Нека да разгледаме възможността нашето Слънце да бъде използвано като гравитационна леща. Пресметнете най-малкото разстояние, f_{min} , от центъра на Слънцето (в AU) на което светлинните лъчи биха могли да се фокусират. 6

(T10.2) Нека да разгледаме малък и кръгъл детектор, с радиус a , който се намира на разстояние f_{min} от Слънцето. Приемаме, че оста Ox е перпендикулярна на детектора и го пресича в неговия център. Забележете, че само лъчи, които преминават през някакъв много тънък пръстен, с дебелина h (където $h \ll R_{\odot}$), около Слънцето, след като преминават покрай него се отклоняват и могат да се регистрират от детектора. Факторът на увеличение (увеличението на интензитета) върху детектора се дефинира като отношението на интензитета на светлината, който пада върху детектора при наличието на Слънцето и при неговото отсъствие. 8

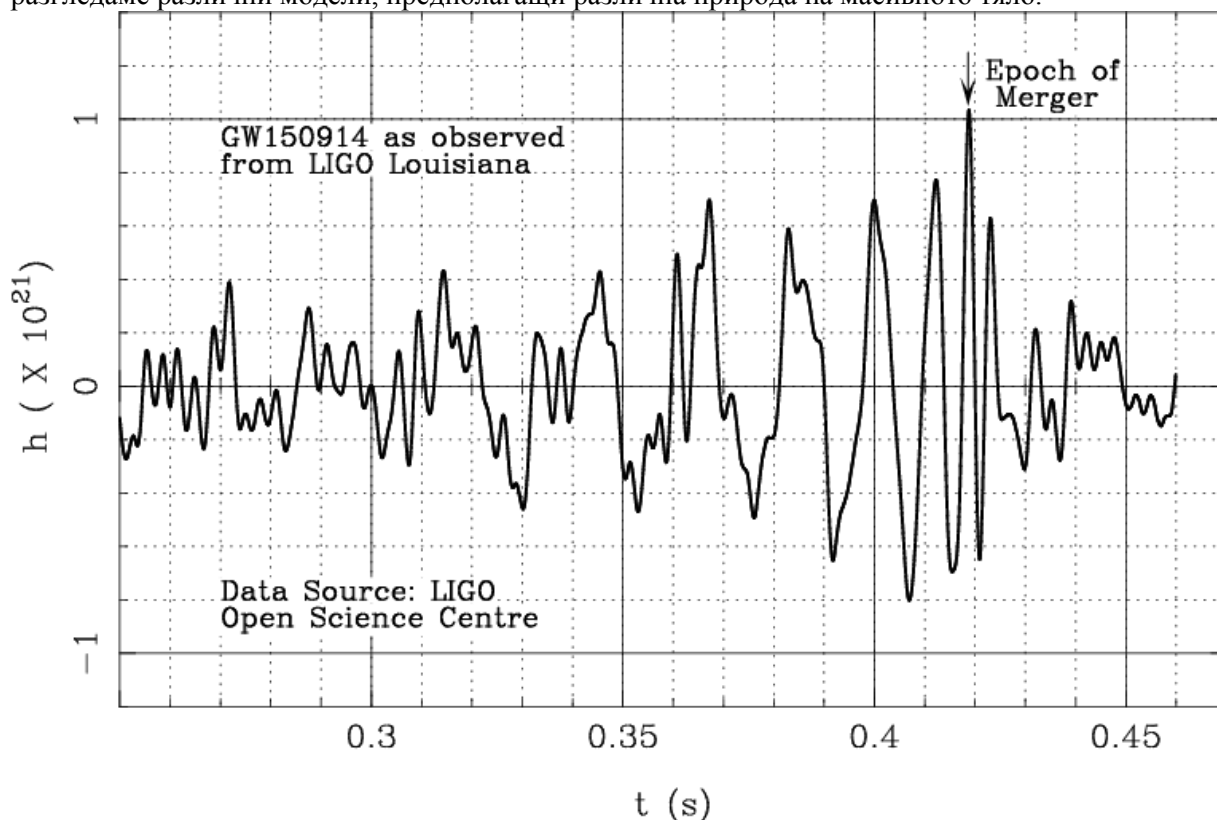
Изразете фактора на увеличение (увеличението на интензитета) A_m , върху детектора, като функция на R_{\odot} и a .

(T10.3) Нека да разгледаме сферичен обем от вещество, през който светлината може да преминава, така както това е възможно през облак от тъмна материя. За простота, приемаме, че за гравитационното отклонение на лъч светлина с прицелен параметър r е от значение само масата, която е затворена в сфера с радиус r - $M(r)$, и център, съвпадащ с центъра на облака. 6

Какво трябва да е разпределението на масата $M(r)$, така че този облак да играе ролята на идеална, оптична, изпъкнала леща?

(T11) Гравитационни вълни

За първи път гравитационни вълни бяха регистрирани от двата детектора на гравитационната обсерватория LIGO, които се намират в градовете Ханфорд и Ливингстън, САЩ, през Септември 2015г. Резултатите от едно от тези наблюдения (отклонение от равновесното положение, като функция на времето, в секунди) са показани на приложената фигура. В тази задача, ние ще интерпретираме тези резултати, разглеждайки тяло с много малка маса m (пробно тяло), движещо се по орбита около обект със съществено по-голяма маса M (т.е., $m \ll M$). Ще разгледаме различни модели, предполагащи различна природа на масивното тяло.



Пробното тяло (имащо маса m) губи от своята механична енергия, поради това, че излъчва гравитационни вълни. В резултат от това, неговата орбита намалява своя радиус и това продължава докато то достигне повърхността на централното тяло, или в случая на черна дупка радиуса на най-близката стабилна орбита (ISCO). Този радиус се задава с израза $R_{ISCO} = 3R_{sch}$, където R_{sch} е радиусът на Шварцшилд на черната дупка. Това се нарича "epoch of merger". Тогава амплитудата на излъчваните гравитационни вълни е максимална, също както и честотата им. Тази честота във всеки един момент е двойно по-голяма от честотата с която малкият обект се движи по своята орбита. В тази задача, ние ще разгледаме подробно само излъчването на гравитационните вълни, излъчени преди сливането ("epoch of merger"), предполагайки, че законите на Кеплер са в сила. След момента на сливане, формата на гравитационните вълни се променя драстично.

(T11.1) Нека да разгледаме резултатите от наблюденията на гравитационни вълни, показани на фигурата по-горе. Оценете орбиталния период T_0 , в момента на сливането "epoch of merger", а след това оценете и честотата, f_0 , на тези вълни, точно преди момента на сливането. 3

(T11.2) За всяка една звезда от Главната последователност, радиусът R_{MS} и масата M_{MS} са свързани със степенен закон, както е показано в таблицата: 10

$$R_{MS} \propto (M_{MS})^\alpha$$

$$\text{where } \alpha = \begin{cases} 0.8 & \text{for } M_\odot < M_{MS} \\ 1.0 & \text{for } 0.08M_\odot \leq M_{MS} \leq M_\odot \end{cases}$$

Ако централният обект е звезда от Главната последователност, запишете израз за максималната възможна честота на гравитационните вълни, f_{MS} , като функция на масата на звездата (в единици слънчеви маси) (M_{MS}/M_\odot) и α .

- (T11.3) Използвайки резултата, получен в предното подусловие, определете подходящата стойност за α за която се постига максималната възможна честота на гравитационните вълни $f_{MS,max}$ за звезда от Главната последователност. Оценете тази честота. 9
- (T11.4) Максималната възможна маса на едно бяло джудже е $1.44 M_\odot$ (известна като граница на Чандрасекар). Съотношението между масата и радиуса на белите джуджета се задава с връзката $R \propto M^{-1/3}$. Радиусът на бяло джудже с маса равна на масата на Слънцето е равен на 6 000 km. Намерете максималната възможна честота $f_{WD,max}$, на излъчваните гравитационни вълни, ако тялото с маса m , обикаля около бяло джудже. 8
- (T11.5) Неутронните звезди са особени, компактни обекти, чиито маси са в диапазона между 1 and $3M_\odot$, а радиусите им са в интервала $10 - 15$ km. Намерете в какъв диапазон (от $f_{NS,min}$ до $f_{NS,max}$) може да се намира честотата на излъчваните гравитационни вълни, ако тялото с маса m , пада към неутронна звезда. 8
- (T11.6) Ако пробното тяло (с маса m) обикаля около черна дупка, то запишете израз за честотата f_{BH} на излъчваните от него гравитационни вълни, като функция на масата на черната дупка M_{BH} , и масата на Слънцето M_\odot . 7
- (T11.7) Използвайки САМО периода (или честотата) на гравитационните вълни преди момента на сливане, определете дали централният обект може да бъде: звезда от Главната последователност (MS), бяло джудже (WD), неутронна звезда (NS) или черна дупка (BH). Отбележете Вашия избор бланката за отговори (Summary Answersheet). Оценете масата на обекта M_{obj} в единици слънчеви маси M_\odot . 5

(T12) Екзопланети

Двата основни метода за откриване на екзопланети (планети около други звезди) са: "методът на лъчевите скорости" и "методът на планетните транзити". В тази задача е показано как обединявайки двата метода може да получим много информация както за планетата, така и за звездата, около която тя обикаля.

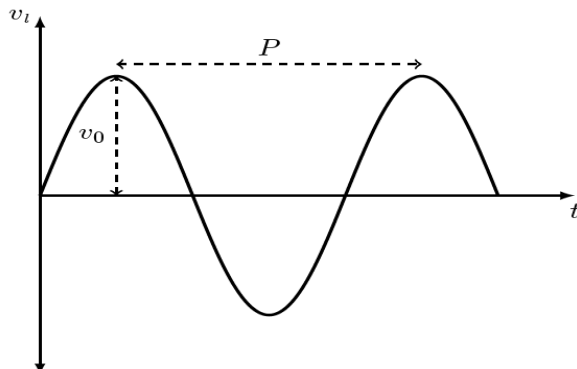
За всички подусловия на задачата приемаме, че планета с маса M_p и радиус R_p се движи по кръгова орбита с радиус a около звезда с маса $M_s (M_s \gg M_p)$ и радиус R_s . Перпендикуляра (нормалата) към равнината на орбитата на планетата е наклонен под ъгъл i относно лъча на зрение, а при $(i = 90^\circ)$ лъчът на зрение лежи в орбиталната равнина. Приемаме, че няма друга планета обикаляща около звездата и че радиусът на звездата е много по малък от радиуса на орбитата $R_s \ll a$.

Метод на лъчевите скорости.

Когато звезда и планета се движат по орбитите си около общия център на масите, звездата също се движи леко около него. В резултат на това движение светлината на звездата претърпява промяна поради ефекта на Доплер, като тази промяна зависи от скоростта на движение на звездата по орбитата.

Кривата на лъчевата скорост v_l на звездата, която може да бъде определена от промяната на Доплеревото отместване на спектрална линия с известна дължина на вълната, като функция на

времето t е показана на диаграмата по-долу. На диаграмата са означени двете величини, които могат да бъдат определени от нея - орбиталният период P и амплитудата на лъчевата скорост v_0 .

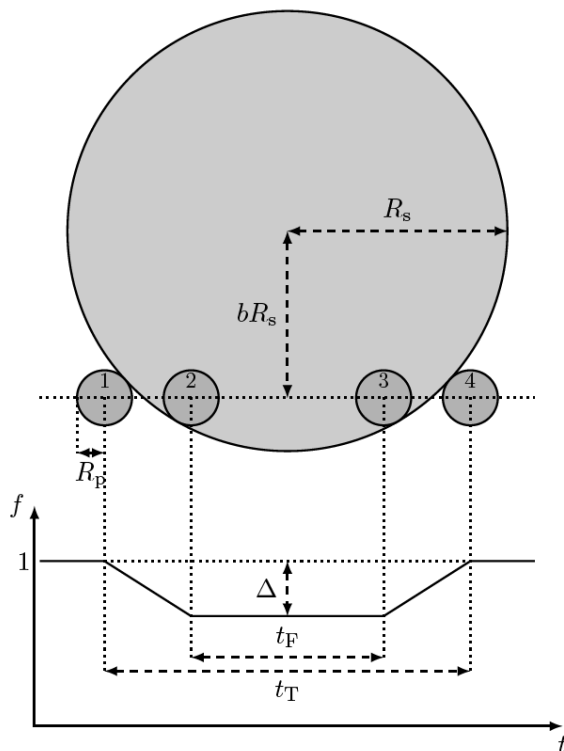


(T12.1) Изразете радиуса на орбитата (a) и скоростта на движение по орбитата (v_p) на планетата, като функция на M_s и P . 3

(T12.2) Определете долната граница на масата на планетата $M_{p,\min}$, като функция на M_s , v_0 и v_p . 4

Метод на транзитите

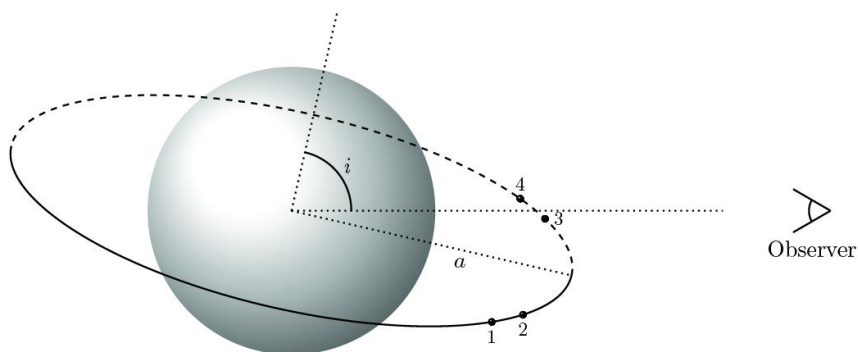
Когато една планета се движи по орбита около звезда и лъчът на зрение е почти в орбиталната равнина ($i \approx 90^\circ$), тя периодично преминава пред диска на звездата. Това се нарича “транзит” на планетата по диска на звездата. Това довежда до леко отслабване на потока светлина който се наблюдава на Земята. На схемата по долу (която **НЕ Е** начертана в точен мащаб) е показано как ще изглежда кривата на блясъка на транзита на планетата от гледна точка на наблюдателя (за нормиран поток f , като функция на времето t), за звезден диск с равномерно разпределение на яркостта.



Ако наклонът на орбитата i е точно 90° , то планета ще пресече диска на звездата точно по неговия диаметър. За стойности на i леко различаващи се от 90° транзитът ще се осъществява по хорда, чиито център лежи на разстояние bR_s от центъра на диска на звездата, както е показано на схемата. Потокът от звездата извън транзита е нормиран към 1(единица) и максималната дълбочина на минимума, по време на транзита, е означена с Δ .

Четирите важни точки, при транзит на планета, са точките на първи, втори, трети и четвърти контакт, означени с позиции от 1 до 4 на фигурата горе. Интервалът от време между втори и трети контакт е означен с t_F , когато дискът на планетата лежи изцяло върху диска на звездата. Интервалът от време между първи и четвърти контакт е означен с t_T .

Същите точки са означени и на схематичната диаграма долу, показваща изглед отстрани към орбитата на планетата около звездата (Относителните мащаби **НЕ СА** спазени).



Величините, които могат да се определят от наблюдения на транзити са P , t_T , t_F и Δ .

(T12.3) Намерете максималната стойност на i изрезана чрез R_s и a за да може транзитът да бъде наблюдаван от наблюдател отдалечен на много голямо разстояние. 2

(T12.4) Изразете Δ чрез R_s и R_p . 1

(T12.5) Изразете t_T и t_F като функции на R_s, R_p, a, P and b . 8

(T12.6) В приближени, в което радиусът на орбитата е много по-голям от радиуса на звездата, покажете, че параметърът b се представя от израза: 5

$$b = \left[1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

(T12.7) Използвайте резултата от често (T12.6) за да получите отношението a/R_s изразено чрез величини, които могат да бъдат измерени от кривата на блясъка на транзита, използвайки подходящи приближения. 3

(12.8) Използвайте резултатите от двата метода, на лъчевите скорости и на транзитите, за да определите средната плътност на звездата $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$, изразена чрез t_T, t_F, Δ и P . 6

Скалиста или газова планета:

Нека да приемем, че при наблюдение от Земята, лъчът на зрение лежи в равнината на орбитата ($i = 90^\circ$) и орбитата на планетата е кръгова. Известно е, че звездата има маса равна на масата на Слънцето – $1.00M_\odot$. Наблюдаван е транзит с период (P) равен на 50.0 денонощия и пълна продължителност на транзита (t_T) равна на 1.00 час. Дълбочината на минимума на транзита (Δ) е 0.0064 . Същата система е наблюдавана по метода на лъчевите скорости и е измерена максимална лъчева скорост на звездата равна на 0.400 ms^{-1} .

(T12.9) Намерете радиуса на орбитата на планетата a изразена в AU и в метри. 2

(T12.10) Намерете отношението t_F/t_T при наблюдаваната система. 2

(T12.11) Определете масата M_p и радиуса R_p на планетата, изразена чрез масата (M_\oplus) и радиуса (R_\oplus) на Земята. Определете дали съставът на планетата я определя като скална или газова? Отбележете ROCKY или GASEOUS в Бланката за решения и отговори (Summary Answersheet.) 8

Transit light curves with starspots and limb darkening:

(T12.12) Приемете, че наклонът на орбитата е $i = 90^\circ$ и на повърхността на звездата има петно сравнимо по размери с планетата, R_p . Периодът на въртене на звездата около оста ѝ е $2P$. Начертайте схематично как ще изглеждат графиките на пет последователно наблюдавани транзита на планетата (върху разграфените полета в Бланката за решения и отговори (Summary Answersheet)). За всеки отделен случай, потокът светлина, извън зоната на транзита, се нормира към единица независимо от останалите четири наблюдения. Приемете, че планетата не покрива петното при първия транзит, но го покрива при втория. 4

- (T12.13) По време на решаване на задачата приехме, че разпределението на яркостта по диска на звездата е равномерно. Обаче, при реалните дискове на звездите се наблюдава потъмнение към края на диск. Начертайте схематично как ще изглежда кривата на блясъка на транзита при наличие на потъмнение към края на диска на звездата. 2