

**(T1) Verdadero o falso**

Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es Verdadera o Falsa. En la hoja de respuestas, marque la respuesta correcta (VERDADERA / FALSA) para cada instrucción. No es necesario justificar esta pregunta.

(T1.1) En una fotografía del cielo despejado o claro en una noche de luna llena con una exposición suficientemente larga, el color del cielo aparecería azul como en el día. 2

(T1.2) Un astrónomo en Bhubaneshwar marca la posición del Sol en el cielo a las 05:00 UT todos los días del año. Si el eje de la Tierra fuera perpendicular a su plano orbital, estas posiciones trazarían un arco de un gran círculo.

(T1.3) Si el período orbital de un cierto cuerpo menor alrededor del Sol en el plano de la eclíptica es menor que el período orbital de Urano. Entonces su órbita debe estar toda necesariamente dentro de la órbita de Urano. 2

(T1.4) El centro de masa del sistema solar se encuentra dentro del sol en todo momento. 2

(T1.5) Con la energía oscura dominando el Universo, en el futuro lejano ninguna otra galaxia será visible desde la Vía Láctea. 2

**(T2) Gases en Titán**
10

Las partículas en una atmósfera planetaria tienen una amplia distribución de velocidades. Si la r.m.s. (raíz de la media cuadrática) velocidad térmica de las partículas de un gas particular excede  $1/6$  de la velocidad de escape, entonces la mayor parte de ese gas escapará del planeta. ¿Cuál es el peso atómico mínimo (masa atómica relativa),  $A_{\min}$ , en un ideal gas monoatómico de modo que permanece en la atmósfera de Titán?

Dado, masa de Titan  $M_T = 1,23 \times 10^{23}$  kg, radio de Titan  $R_T = 2575$  km, temperatura superficial de Titan  $T_T = 93,7$  K.

**(T3) Universo Temprano**

Los modelos cosmológicos indican que la densidad de energía de la radiación,  $\rho_r$ , en el Universo es proporcional a  $(1+z)^4$ , y la densidad de energía de la materia,  $\rho_m$ , es proporcional a  $(1+z)^3$ , donde  $z$  es el desplazamiento al rojo. El parámetro de densidad adimensional,  $\Omega$ , se da como  $\Omega = \rho/\rho_c$ , donde  $\rho_c$  es la densidad de energía crítica del Universo. En el Universo actual, los parámetros de densidad correspondientes a la radiación y a la materia son  $\Omega_{r0} = 10^{-4}$  y  $\Omega_{m0} = 0,3$ , respectivamente.

(T3.1) Calcule el corrimiento al rojo,  $z_e$ , en el que la radiación y la densidad de energía de la materia eran iguales. 3

(T3.2) Suponiendo que la radiación del Universo primitivo tiene un espectro de cuerpo negro, estime la temperatura,  $T_e$ , de la radiación con corrimiento al rojo  $z_e$ . 4

(T3.3) Estime la energía típica del fotón  $E_\nu$  (en eV), de la radiación con corrimiento al rojo  $z_e$ . 3

**(T4) Sombras**

Un observador del hemisferio norte notó que la longitud de la sombra más corta que produce una vara vertical de 1,000 m en un día es de 1,732 m. Mientras que el mismo día, la longitud de la sombra más larga del mismo palo vertical fue de 5,671 m. 10

Encuentra la latitud,  $\phi$ , del observador y la declinación del Sol,  $\delta_\odot$  en ese día. Considere el Sol como una fuente puntual e ignore la refracción atmosférica.

(T5) Tránsito en el GMRT

10

Giant Metrewave Radio Telescope (GMRT), uno de los radiotelescopios más grandes del mundo en el rango de longitudes de onda de metros, se encuentra en el oeste de la India (latitud:  $19^{\circ}6' N$ , longitud:  $74^{\circ}3' E$ ) GMRT consta de 30 antenas parabólicas, cada una con un diámetro de 45,0 m. Una sola antena del GMRT se mantuvo fijo con su eje apuntando a un ángulo cenital de  $39^{\circ}42'$  a lo largo del meridiano norte de tal manera que una fuente puntual de radiación pasaría a lo largo de un diámetro del haz, cuando está transitando el meridiano.

¿Cuál será la duración  $T_{\text{transit}}$  para la cual esta fuente estaría dentro del FWHM (full width at half maximum) del haz de una sola antena GMRT realizando la observación a 200 MHz?

**Ayuda:** El tamaño del haz FWHM de una antena de radio que funciona a una frecuencia dada corresponde a la resolución angular de la misma. Suponga una iluminación uniforme.

(T6) Pulsaciones de las Cefeidas

La estrella  $\beta$ -Doradus es una estrella variable cefeida con un período de pulsación de 9,84 días. Si hacemos una suposición que permita simplificar (simplificadora) que la estrella es más brillante cuando está más contraída (radio  $R_1$ ) y menos brillante o más débil cuando está más expandida (siendo el radio  $R_2$ ). Por simplicidad asuma que la estrella mantiene su forma esférica y se comporta como un cuerpo negro perfecto en cada instante durante todo el ciclo. La magnitud bolométrica de la estrella varía de 3,46 a 4,08. A partir de las mediciones Doppler, sabemos que durante la pulsación la superficie estelar se expande o se contrae a una velocidad radial media de 12,8 km/s. Durante el periodo de pulsación, el pico de radiación térmica de la estrella varía de 531,0 nm a 649,1 nm.

(T6.1) Encuentre la razón entre los radios de las estrellas en sus estados o momentos de mayor contracción y mayor expansión ( $R_1/R_2$ ). 6

(T6.2) Encuentre los radios de la estrella (en metros) en sus estados de mayor contracción y mayor expansión ( $R_1$  y  $R_2$ ). 4

(T6.3) Calcule el flujo de la estrella,  $F_2$ , cuando esta se encuentra en su estado de mayor expansión.. 5

(T6.4) Encuentre la distancia a la estrella,  $D_{\text{star}}$ , en parsecs. 5

(T7) Óptica de un Telescopio

En un particular telescopio refractor de relación focal  $f/5$ , la distancia focal de la lente objetivo es de 100 cm y la del ocular es de 1 cm.

(T7.1) ¿Cuál es el aumento o magnificación angular,  $m_0$ , del telescopio? ¿Cuál es su longitud,  $L_0$  i.e. la distancia entre el objeto y el ocular? 4

Al introducir o colocar una lente cóncava, (lente de Barlow), entre la lente objetiva y el foco principal, se obtiene una manera común de aumentar la ampliación o magnificación, sin llevar a cabo un gran aumento en la longitud del telescopio. Si se introduce una lente Barlow de 1 cm de distancia focal entre el el objeto y el ocular para duplicar la ampliación.

(T7.2) ¿A qué distancia,  $d_B$ , del foco primario debe mantenerse la lente de Barlow para obtener esta doble ampliación o magnificación deseada? 6

4

(T7.3) ¿Cuál es el incremento,  $\Delta L$ , en la longitud del telescopio?

Si se construye ahora un telescopio con la misma lente objetivo y un detector CCD colocado en el foco principal (sin ningún lente Barlow ni ocular). El tamaño de cada píxel del detector CCD es de  $10 \mu\text{m}$ .

(T7.4) ¿Cuál será la distancia de separación en píxeles,  $n_p$ , entre los centroides de la imagen de dos estrellas, en la CCD, de 2 estrellas que están  $20''$  separadas en el cielo? 6

**(T8) Fotometría de la U-Banda**

Una estrella tiene una magnitud aparente  $m_U = 15,0$  en la banda U. El filtro de banda U es ideal, es decir, tiene una transmisión perfecta (100%) dentro de la banda y es completamente opaco (0% de transmisión) fuera de la banda. El filtro está centrado a  $360 \text{ nm}$ , y tiene una anchura de  $80 \text{ nm}$ . Se supone que la estrella también tiene un espectro de energía plana con respecto a la frecuencia. La conversión entre magnitud,  $m$ , en cualquier banda y densidad de flujo,  $f$ , de una estrella en Janskies ( $1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$ ) está dada por:

$$f = 3631 \times 10^{-0,4m} \text{ Jy}$$

(T8.1) Aproximadamente, ¿cuántos fotones en la banda U,  $N_0$ , de esta estrella incidirán normalmente en un área de  $1 \text{ m}^2$  en la parte superior de la atmósfera terrestre cada segundo? 8

Esta estrella se está observando en la banda U usando un telescopio en Tierra, cuyo espejo primario tiene un diámetro de  $2,0 \text{ m}$ . La extinción atmosférica en la banda U durante la observación es del 50%. Usted puede asumir que la vista es excelente. El brillo superficial promedio del cielo nocturno en la banda U se midió en  $22,0 \text{ mag/arcsec}^2$ .

(T8.2) ¿Cuál es la razón,  $R$ , del número de fotones recibidos por segundo de la estrella a la recibida del cielo, cuando se mide sobre una abertura circular de diámetro  $2''$ ?

(T8.3) En la práctica, sólo el 20% de los fotones en la banda U que caen en el espejo primario son detectados. ¿Cuántos fotones,  $N_t$ , de la estrella se detectan por segundo? 4

**(T9) Misión Orbitador de Marte**

La misión Orbitador de Marte de la India (MOM) fue lanzada usando el vehículo del lanzamiento de satélites polares (PSLV) el 5 de noviembre de 2013. La carga útil de MOM (cuerpo + instrumentos) era de  $500 \text{ kg}$  y llevaba  $852 \text{ kg}$  de combustible. Se colocó inicialmente en una órbita elíptica alrededor de la Tierra con perigeo a una altura de  $264,1 \text{ km}$  y un apogeo a una altura de  $23903,6 \text{ km}$ , sobre la superficie de la Tierra. Después de elevar la órbita seis veces, la MOM se transfirió a una órbita de inyección trans-Marte (órbita de Hoffman).

La primera aproximación a dicha órbita de despeje fue realizada prendiendo los motores durante un corto periodo de tiempo cerca al perigeo. Lo cual se realizó de tal forma que cambiase la órbita pero no el plano de movimiento. Esto permitió dar un impulso neto de  $1,73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$  al satélite. Ignore el cambio de masa durante el tiempo que se está quemando el combustible.

(T9.1) ¿Cuál es la altura del Nuevo apogeo,  $h_a$  respecto a la superficie de la tierra, después de que empiece a quemarse el combustible? 12

(T9.2) Encuentre la excentricidad ( $e$ ) de la nueva órbita después de que empieza la quema de combustible y el Nuevo periodo orbital ( $P$ ) de MOM en horas. 8

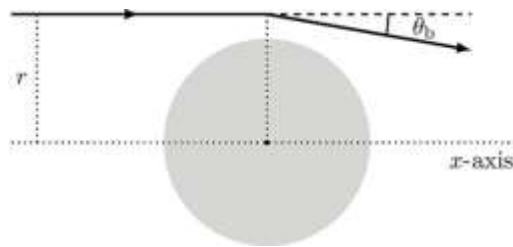
(T10) **Telescopio de Lentes Gravitacionales**

La teoría general de la relatividad de Einstein predice la desviación de la luz alrededor de cuerpos masivos. Para simplificar, suponemos que la desviación de la luz ocurre en un solo punto para cada rayo de luz, tal como se muestra en la figura.

El ángulo de flexión,  $\theta_b$ , viene dado por

$$\theta_b = \frac{2R_{sch}}{r}$$

Donde  $R_{sch}$  es el radio de Schwarzschild asociado al caso de atracción gravitacional. Llamamos  $r$ , la distancia a la que pasa el rayo luminoso paralelo del eje  $x$  que pasa por el centro del cuerpo, tal como el "parámetro de impacto".



Un cuerpo masivo se comporta como una lente de enfoque. Los rayos de luz del infinito respecto al cuerpo masivo, y que tienen el mismo parámetro de impacto  $r$ , convergen en un punto a lo largo del eje, a una distancia  $f_r$  del centro del cuerpo masivo. Un observador en ese punto se beneficiará de una gran amplificación debido a este enfoque gravitacional. El cuerpo masivo en este caso se está utilizando como un telescopio de lentes gravitacionales para la amplificación de señales distantes.

(T10.1) Considere la posibilidad de nuestro Sol como un telescopio de lente gravitacional. Calcule la distancia más corta,  $f_{min}$ , desde el centro del Sol (en U.A.) a la que los rayos de luz pueden enfocarse. 6

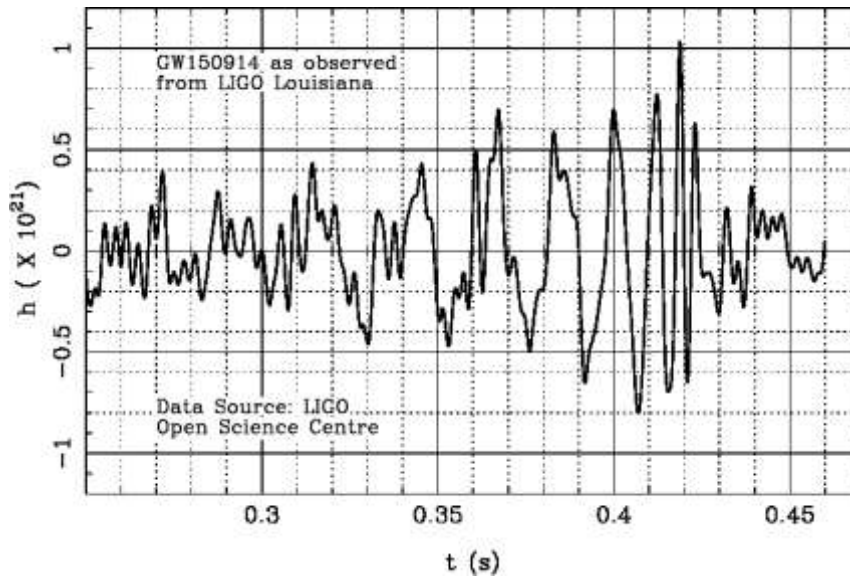
(T10.2) Consideremos un pequeño detector circular de radio  $a$ , colocado a una distancia  $f_{min}$  centrado en el eje  $x$  y perpendicular al eje. Tenga en cuenta que sólo los rayos de luz que pasan dentro de un determinado anillo de ancho  $h$  (donde  $h \ll R_{\odot}$ ) alrededor del Sol se encontrarían con el detector. El factor de amplificación en el detector se define como la relación de la intensidad de la luz incidente en el detector en presencia del Sol y la intensidad en ausencia del Sol

Halle la expresión para el factor de amplificación  $A_m$ , en el detector en términos de  $R_{\odot}$  y  $a$ .

(T10.3) Considere una esfera con distribución de masa, tal como un cúmulo de galaxias de materia oscura, a través del cual los rayos de luz pueden pasar mientras se experimentan una desviación gravitacional. Supongamos, por simplicidad, que para el parámetro de flexión gravitatoria con impacto  $r$ , sólo es relevante la masa  $M(r)$  encerrada dentro del radio  $r$ . ¿Cuál debería ser la distribución de masa,  $M(r)$ , tal que la lente gravitacional se comporta como una lente convexa ideal? 6

(T11) Ondas Gravitacionales

La primera señal de ondas gravitacionales fue observada por dos avanzados detectores LIGO en Hanford y Livingston, EE. UU. En septiembre de 2015. Una de estas mediciones (tensión vs tiempo en segundos) se muestra en la figura adjunta. En este problema, interpretaremos esta señal en términos de una pequeña masa de prueba  $m$  orbitando alrededor de una gran masa  $M$  (i.e.,  $m \ll M$ ), considerando varios modelos para la naturaleza de la masa central



La masa de prueba pierde energía debido a la emisión de ondas gravitacionales. Como resultado, la órbita sigue contrayéndose, hasta que la masa de prueba llega a la superficie del objeto, o en el caso de un agujero negro, la órbita circular más estable interna - ISCO - dada por  $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{Sch}}$ , donde  $R_{\text{Sch}}$  es el Schwarzschild, radio del agujero negro. Esta es la "etapa de fusión". En este punto, la amplitud de la onda gravitacional es máxima y su frecuencia, es siempre el doble de la frecuencia orbital. En este problema, sólo nos centraremos en las ondas gravitacionales antes de la fusión, cuando se asume que las leyes de Kepler son válidas. Después de la fusión, la forma de las ondas gravitacionales cambiará drásticamente.

(T11.1) Considere las ondas gravitacionales observadas y mostradas en la figura anterior. Calcule el período de tiempo,  $T_0$ , y la frecuencia,  $f_0$ , de las ondas gravitacionales justo antes del momento de la fusión 3

(T11.2) Para muchas estrellas de la secuencia principal, el radio de la estrella,  $R_{\text{MS}}$ , y su masa,  $M_{\text{MS}}$ , están relacionadas por la ley de potencia, expresada como, 8

$$R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^\alpha$$

$$\text{where } \alpha = \begin{cases} 0.8 & \text{for } M_\odot < M_{\text{MS}} \\ 1.0 & \text{for } 0.08M_\odot \leq M_{\text{MS}} \leq M_\odot \end{cases}$$

Si el objeto central era una estrella de la secuencia principal, escriba una expresión para la frecuencia máxima de las ondas gravitacionales,  $f_{\text{MS}}$ , en términos de la masa de la estrella y en unidades de masas solares ( $M_{\text{MS}}/M_\odot$ ) y  $\alpha$ .

(T11.3) Utilizando el resultado anterior, determine el valor apropiado de  $\alpha$  que permita obtener la máxima frecuencia posible de ondas gravitacionales,  $f_{\text{MS,max}}$  para cualquier estrella de la secuencia principal. Evalúe esta frecuencia. 7

(T11.4) Las estrellas enanas blancas (WD) tienen una masa máxima de  $1,44M_{\odot}$  (conocida como límite de Chandrasekhar) y esta asociada a la relación masa-radio  $R \propto M^{-1/3}$ . El radio de una enana blanca de masa solar es igual a 6000 km. Encuentre la frecuencia más alta de ondas gravitacionales emitidas,  $f_{WD,max}$ , si la masa de prueba está orbitando una enana blanca.

(T11.5) Las estrellas de neutrones son un tipo particular de objetos compactos que tienen masas entre 1 and  $3M_{\odot}$  y un radio en el rango de 10 – 15 km. Encuentre el rango de frecuencias que emite la onda gravitacional,  $f_{NS,min}$  y  $f_{NS,max}$ , si la masa de prueba está orbitando una estrella de neutrones a una distancia cercana al radio de la estrella de neutrones. 10

Si la masa de prueba está en órbita alrededor de un agujero negro, escriba la expresión para la frecuencia de ondas gravitacionales emitidas,  $f_{BH}$ , en términos de la masa del agujero negro,  $M_{BH}$ , y la masa solar  $M_{\odot}$ .

(T11.6) Si la masa de prueba está en órbita alrededor de un agujero negro, escriba la expresión para la frecuencia de ondas gravitacionales emitidas,  $f_{BH}$ , en términos de la masa del agujero negro,  $M_{BH}$ , y la masa solar  $M_{\odot}$ . 7

(T11.7) Basándose sólo en el período de tiempo (o frecuencia) de las ondas gravitacionales antes del momento fusión, determine si el objeto central puede ser una estrella de la secuencia principal (MS), una enana blanca (WD), una estrella de neutrones (NS) o una Agujero negro (BH). Marque la opción correcta en la hoja de respuesta. Estime la masa de este objeto,  $M_{obj}$ , en unidades de  $M_{\odot}$ . 5

## (T12) Exoplanetas

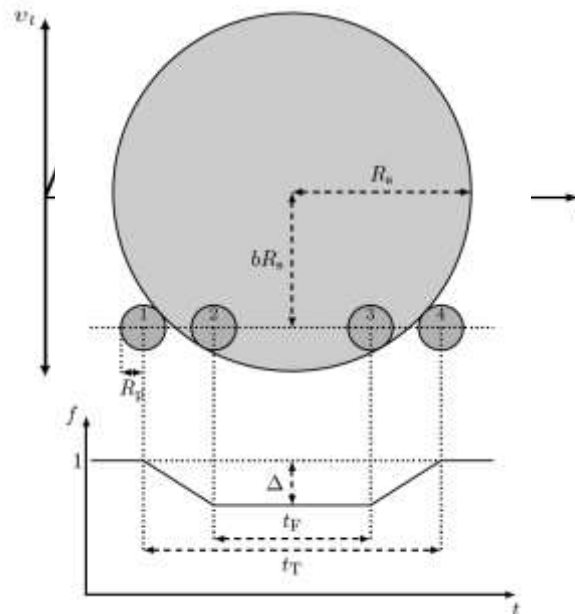
Dos métodos importantes de detección de exoplanetas (planetas alrededor de estrellas distintas al Sol) son el método de velocidad radial (o lo que se denomina "oscilación") y el método de tránsito. En este problema, descubrimos cómo una combinación de los resultados de estos dos métodos puede revelar mucha información sobre un exoplaneta en órbita y su estrella anfitriona.

A lo largo de este problema, consideramos el caso de un planeta de masa  $M_p$  y radio  $R_p$  moviéndose en una órbita circular de radio  $a$  alrededor de una estrella de masa  $M_s$  ( $M_s \gg M_p$ ) y radio  $R_s$ . La normal al plano orbital del planeta está inclinada en el ángulo  $i$  con respecto a la línea de visión ( $i = 90^\circ$  significaría "sobre" la órbita). Asumimos que no hay otro planeta orbitando la estrella y  $R_s \ll a$ .

### Método de "Bamboleo":

Cuando un planeta y una estrella orbitan entre sí alrededor de su baricentro, la estrella parece moverse ligeramente, o "bambolear", ya que el centro de masa de la estrella no coincide con el baricentro del sistema estrella-planeta. Como resultado, la luz recibida de la estrella experimenta un pequeño desplazamiento Doppler relacionado con la velocidad de esta oscilación.

La línea de visión de a velocidad,  $v_l$ , de la estrella puede determinarse a partir del desplazamiento Doppler de una línea espectral conocida, y su variación periódica con el tiempo,  $t$ , tal como se muestra en el siguiente diagrama. En el diagrama, las dos magnitudes medibles en este método, a saber, el período orbital  $P$  y la línea máxima de velocidad de visión  $v_0$  son mostradas.



(T12.1) Encuentre la expresión para el radio orbital ( $a$ ) y la velocidad orbital ( $v_p$ ) del planeta en términos de  $M_s$  y  $P$ . 3

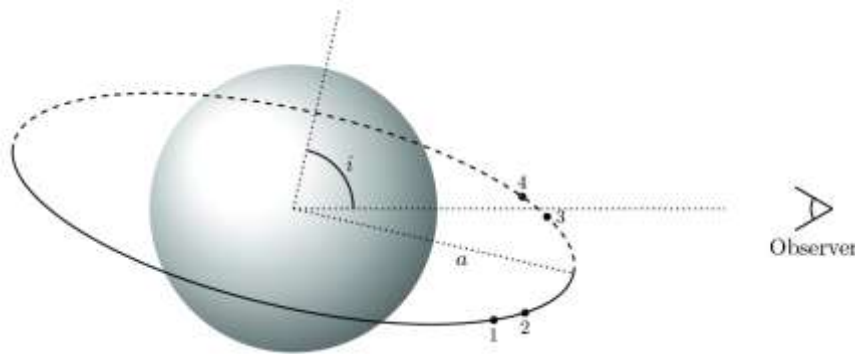
(T12.2) Obtenga el menor valor límite para la masa  $M_{p,\min}$  en términos de  $M_s$ ,  $v_0$  y  $v_p$ . 4

### Método del Transito:

Como un planeta orbita su estrella, para orientaciones del plano orbital que están cerca del "borde sobre" ( $i \approx 90^\circ$ ), este planeta pasará periódicamente, o "transitará", delante del disco estelar como el diagrama siguiente (NO dibujado a escala) muestra la situación desde la perspectiva del observador y la curva de luz de tránsito resultante (flujo normalizado,  $f$ , vs tiempo,  $t$ ) para un disco estelar uniformemente brillante.

Si el ángulo de inclinación  $i$  es exactamente  $90^\circ$ , se verá al planeta que cruza el disco estelar a lo largo de un diámetro. Para otros valores de  $i$ , el tránsito se produce a lo largo de una cuerda del círculo, cuyo centro se encuentra a una distancia  $bR_s$  del centro del disco estelar, como se muestra. El flujo sin tránsito se normaliza a 1 y la inmersión máxima durante el tránsito viene dada por  $\Delta$ .

Los cuatro puntos significativos en el tránsito son el primer, segundo, tercero y cuarto contactos, marcados por las posiciones 1 a 4, respectivamente, en la figura anterior. El intervalo de tiempo durante el segundo y el tercer contacto se denota como  $t_F$ , cuando el disco del planeta se superpone completamente al disco estelar. El intervalo de tiempo entre el primer y el cuarto contactos se denota por  $t_T$ . Estos puntos también están marcados en el diagrama que se muestra abajo, mostrando una vista lateral de la órbita (NO dibujada a escala).



Las cantidades medibles en el método de tránsito son  $P$ ,  $t_T$ ,  $t_F$  y  $\Delta$ .

(T12.3) Encuentre la restricción sobre  $i$  en términos de  $R_s$  y  $a$  para la cual el tránsito se visible para todos los observadores distantes.

(T12.4) Exprese  $\Delta$  en términos de  $R_s$  and  $R_p$ .

(T12.5) Exprese  $t_T$  y  $t_F$  en terminus de  $R_s$ ,  $R_p$ ,  $a$ ,  $P$  y  $b$ .

(T12.6) En la aproximación de una órbita mucho mayor que el radio estelar, demuestre que el parámetro  $b$  viene dado por la expresión.

$$b = \left[ 1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

(T12.7) Use el resultado de la parte (T12.6) para obtener una expression para el radio  $a/R_s$  en términos medibles de los parámetros del tránsito, utilizando una aproximación adecuada.

(T12.8) Combinar los resultados del método de bamboleo y el método de tránsito para determinar la densidad media estelar  $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$  en términos de  $t_T$ ,  $t_F$ ,  $\Delta$  y  $P$ .

**Rocoso o gaseoso:**

Considere que se encuentra sobre el borde ( $i = 90^\circ$ ) de un sistema estrella-planeta (órbita circular para el planeta), como se ve desde la Tierra. Se sabe que la estrella anfitriona es de masa  $1,00M_\odot$ . Los tránsitos se observan con un período ( $P$ ) de 50,0 días y una duración total del tránsito ( $t_T$ ) de 1,00 horas. La profundidad del tránsito ( $\Delta$ ) es 0,0064. El mismo sistema también se observa en el método de oscilación presentando una velocidad máxima lineal de 0,400 m/s

(T12.9) Encuentre el radio orbital  $a$  del planeta en unidades de AU y en metros.

(T12.10) Encuentre la razón  $t_F/t_T$  del sistema.

(T12.11) Obtenga la masa  $M_p$  y el radio  $R_p$  del planeta en términos de la masa ( $M_\oplus$ ) y el radio ( $R_\oplus$ ) de la Tierra, respectivamente. ¿Es probable que la composición del planeta sea rocosa o gaseosa? Marque la casilla de ROCKY o GASEOUS en la hoja de respuestas.



**Transito realista de la curva de luz:**

(T12.12) Considere un tránsito planetario con  $i = 90^\circ$  alrededor de una estrella que tiene una mancha estelar en su ecuador, comparable con el tamaño del planeta,  $R_p$ . El período de rotación de la estrella es  $2P$ . Dibujar diagramas, indique los ejes, esquemáticos de la curva de luz del tránsito para cinco tránsitos sucesivos del planeta ( en las plantillas provistas en las hojas de respuesta). El flujo sin tránsito para cada tránsito puede normalizarse a la uno independientemente. Asuma que el planeta no se cruza con la mancha estelar en el primer tránsito pero si en el segundo.

4

(T12.13) A lo largo del problema hemos considerado un disco estelar uniformemente brillante. Sin embargo, los discos estelares reales tienen oscurecimiento de los bordes. Dibuje la curva de luz esquemática del tránsito cuando el oscurecimiento del borde está presente en la estrella anfitriona.

2