

(T1) Točno ili pogrešno (True or False)

Odgovorite je li svaka od sljedećih tvrdnji točna ili pogrešna. U listu za odgovore za svaku tvrdnju označite kvačicom ispravni odgovor (TRUE / FALSE). Za ovaj zadatak ne trebate pisati nikakva dodatna objašnjenja.

- (T1.1) Na fotografiji čistog neba snimljenoj u noći punog Mjeseca s dovoljno dugom ekspozicijom, boja neba biti će plava kao za vrijeme dana. 2
- (T1.2) Astronom u Bhubaneswaru bilježio je položaj Sunca na nebu svakog dana u godini u 05:00UT. Ako je Zemljina os vrtnje okomita na njenu stazu, ti položaji će se nalaziti na velikoj kružnici. 2
- (T1.3) Ako je orbitalni period nekog malog tijela (koje se nalazi u ravnini ekliptike) oko Sunca kraći od orbitalnog perioda Urana, tada njegova staza obavezno mora u cijelosti biti unutar staze Urana. 2
- (T1.4) Centar mase Sunčeva sustava cijelo se vrijeme nalazi unutar Sunca. 2
- (T1.5) Foton se giba kroz prazni svemir. Kako se svemir širi njegova količina gibanja se smanjuje. 2

(T2) Plinovi na Titanu

Čestice plina u atmosferi planeta imaju široku raspodjelu brzina. Ako je toplinska srednja kvadratna brzina čestice određenog plina veća od $1/6$ druge kozmičke brzine, tada će većina plina pobjeći s planeta. Koja je najmanja atomska masa, A_{\min} , idealnog jednoatomskog plina koji će ostati u atmosferi Titana?

Zadano je: masa Titana $M_T = 1,23 \times 10^{23}$ kg, polumjer Titana $R_T = 2575$ km, površinska temperatura Titana $T_T = 93,7$ K.

(T3) Mladi svemir

Kozmološki modeli predviđaju da je gustoća energije zračenja u svemiru ρ_r , razmjerna s $(1+z)^4$, kao i da je gustoća energije tvari, ρ_m razmjerna s $(1+z)^3$, gdje z predstavlja crveni pomak. Bezdimenzionalni parametar gustoće, Ω , dan je kao $\Omega = \rho / \rho_c$, gdje je ρ_c kritična gustoća energije u svemiru. U današnjem svemiru parametri gustoće koji odgovaraju zračenju i masi iznose redom: $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$ i $\Omega_{m_0} = 0,3$.

- (T3.1) Izračunajte crveni pomak z_e kod kojeg su gustoća energije zračenja i gustoća energije tvari jednake. 3
- (T3.2) Uz pretpostavku da zračenje mladog svemira ima raspodjelu zračenja kao crno tijelo temperature 2,732 K, izračunajte temperaturu zračenja T_e pri crvenom pomaku z_e . 4
- (T3.3) Izračunajte energiju fotona E_ν (iskazanu u eV) nastalog zračenjem pri crvenom pomaku z_e koju opažamo danas. 3

(T4) Sjene

Opažač na sjevernoj poluci izmjerio je da najkraća sjena koju baca okomiti štap visine 1,000 m na neki dan iznosi 1,732 m. Toga dana najveća duljina sjene ovog okomitog štapa iznosila je 5,671 m.

Odredite geografsku širinu opažača φ i deklinaciju Sunca d_\odot toga dana. Pretpostavite da je Sunce točkasti izvor i zanemarite atmosfersku refrakciju.

(T5) Prelazak kroz polje zračenja GMRT-a

Divovski radioteleskop za metarske valne duljine (GMRT) koji je smješten na zapadu Indije (geografska duljina: $19^\circ 6'N$, geografska širina: $74^\circ 3'E$) jedan je od najvećih svjetskih teleskopa za detekciju zračenja u metarskom području valnih duljina. GMRT se sastoji od 30 tanjurastih antena od kojih je svaka promjera 45,0 m. Jedna antena GMRT-a učvršćena je i usmjerena prema točki koja se nalazi na sjevernom meridijanu i na zenitnoj daljini od $39^\circ 42'$. Tako će točkasti izvor radio zračenja proći poljem zračenja antene kada prelazi preko meridijana.

Koliko je vremena (T_{tranzit}) potrebno da se ovaj izvor nalazi unutar FWHM (puna širina na pola maksimuma) tijekom prolaska kroz polje zračenja jedne antene GMRT-a koja opaža na 200 MHz?

Uputa: Veličina FWMH tanjuraste radio antene koja opaža na određenoj frekvenciji odgovara kutnom razlučivanju antene. Pretpostavite jednoliku raspodjelu zračenja.

(T6) Pulsiranje cefeide

Zvijezda β -Doradus promjenljiva je zvijezda tipa cefeida s periodom pulsacije od 9,84 dana. Učinit ćemo pojednostavljenu pretpostavku da je zvijezda najsjajnija kada je najmanja (s polumjerom R_1), a najslabijeg sjaja kada je najveća (s polumjerom R_2). Radi jednostavnosti pretpostavite da je zvijezda stalno sfernog oblika i da se ponaša kao savršeno crno tijelo u svakom trenutku tijekom ciklusa. Bolometrijska zvjezdana veličina zvijezde mijenja se od $3,46^m$ do $4,08^m$. Mjerenjem Dopplerova učinka, znamo da se tijekom pulsacije površina zvijezde širi i skuplja prosječnom radijalnom brzinom od $12,8 \text{ km s}^{-1}$. Tijekom perioda pulsacije maksimum (intrinzičnog) toplinskog zračenja zvijezde mijenja se od 531,0 nm do 649,1 nm.

(T6.1) Odredite omjer polumjera zvijezde kada je najmanja i najveća (R_1/R_2). 7

(T6.2) Odredite polumjer zvijezde (izražen u metrima) kada je najmanja i najveća (R_1 i R_2). 3

(T6.3) Izračunajte tok zračenja F_2 zvijezde kada je najveća. 5

(T6.4) Odredite udaljenost zvijezde D_{star} u parsecima. 5

(T7) Optika teleskopa

U nekom idealnom teleskopu refraktoru f-broja $f/5$, žarišna daljina leće objektiva iznosi 100 cm, a okulara 1 cm.

(T7.1) Koliko iznosi povećanje m_0 teleskopa? Kolika je duljina teleskopa L_0 , tj. udaljenost između objektiva i okulara? 4

Postavljanje konkavne leće (Barlow leće) između objektiva i primarnog žarišta uobičajen je način da se postigne veće povećanje bez značajnijeg produljenja duljine teleskopa. Barlow leća žarišne daljine 1 cm sada je postavljena između objektiva i okulara kako bi se udvostručilo povećanje.

(T7.2) Na kojoj udaljenosti d_B od primarnog žarišta mora biti postavljena Barlow leća kako bi se ostvarilo željeno udvostručenje povećanja? 6

(T7.3) Za koliko se (ΔL) povećala ukupna duljina teleskopa? 4

Teleskop je sada postavljen s istom lećom objektiva i s CCD detektorom smještenog u primarno žarište (bez Barlow leće i okulara). Veličina svakog piksela CCD detektora iznosi 10 μm .

(T7.4) Kolika bi bila udaljenost izražena u pikselima (n_p) između središta slika dviju zvijezda na CCD-u, ako su one na nebu razmaknute $20''$? 6

(T8) Fotometrija u U području

Zvijezda ima u U području prividnu zvjezdanu veličinu $m_U = 15,0$. Filtar za U područje je idealan, tj. ima savršenu (100%) propusnost unutar područja, dok je potpuno nepropusan (0% propusnosti) izvan tog područja. Središte propusnosti filtra iznosi 360 nm, a propusno područje široko je 80 nm. Također se pretpostavlja da zvijezda ima isti intenzitet zračenja na svim frekvencijama u spektru. Preračunavanje između zvjezdane veličine m u bilo kojem području i za bilo koju gustoću toka zračenja f zvijezde iskazano u jedinicama Jansky ($1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ WHz}^{-1} \text{ m}^{-2}$) može se izračunati kao:

$$f = 3631 \times 10^{-0,4m} \text{ Jy}$$

(T8.1) Koliko će približno fotona N_0 iz U područja koji dolaze s te zvijezde prolaziti svake sekunde kroz površinu od 1 m^2 postavljenu iznad Zemljine atmosfere okomito na njihov smjer? 8

Ova zvijezda promatrana je u U području koristeći teleskop na površini Zemlje čije primarno zrcalo ima promjer od 2,0 m. Atmosferska ekstinkcija u U području tijekom promatranja iznosi 50%. Možete pretpostaviti da je kvaliteta opažanja ograničena difrakcijom. Izmjereni prosječni površinski sjaj noćnog neba u U području iznosi $22,0 \text{ mag/arcsec}^2$.

(T8.2) Koliki je omjer R broja fotona pristiglih u jednoj sekundi koji dolaze sa zvijezde u odnosu na one koji su pristigli s neba ako mjerimo na kružnom području promjera $2''$? 8

(T8.3) U praksi se detektira samo 20% fotona iz U područja koji upadaju na primarno zrcalo. Koliko se fotona N_t pristiglih s te zvijezde detektira svake sekunde? 4

(T9) Misija Mars Orbiter

Indijska letjelica Mars Orbiter (MOM) lansirana je dana 5. studenog 2013. godine pomoću rakete Polar Satellite Launch Vehicle (PSLV). Masa praznog MOM-a (letjelica s instrumentima) iznosila je 500 kg i dodatno je nosila gorivo mase 852 kg. U početku je postavljena u eliptičnu stazu oko Zemlje, takvu da je od Zemljine površine perigej bio udaljen 264,1 km, a apogej 23903,6 km. Nakon što je staza povisivana šest puta, MOM je bio prebačen u prijelaznu stazu prema Marsu (Hohmanovu stazu).

Prvo povišenje staze izvedeno je pomoću paljenja motora u blizini perigeja tijekom veoma kratkog vremenskog perioda. Motori su upaljeni na način da se staza promijenila bez utjecaja na ravninu staze i položaj perigeja. Satelitu je predan impuls ukupnog iznosa $1,73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$. Zanimarite promjenu mase zbog izgaranja goriva.

(T9.1) Koliko iznosi udaljenost novog apogeja h_a od Zemljine površine nakon ovog paljenja motora? 14

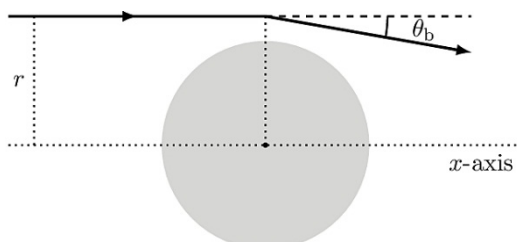
(T9.2) Odredite ekscentricitet (e) nove staze, kao i novi orbitalni period (P) MOM-a iskazan u satima nakon gašenja motora. 6

(T10) Gravitacijska leća kao teleskop

Einsteinova opća teorija relativnosti predviđela je zakretanje svjetlosti u blizini masivnih tijela. Radi jednostavnosti pretpostavljamo da se taj zakret pojedine zrake svjetlosti zbiva u jednoj točki kako je prikazano na slici. Za kut zakreta θ_b vrijedi:

$$\theta_b = \frac{2R_{\text{sch}}}{r}$$

gdje je R_{sch} Schwarzschildov polumjer povezan s tim masivnim tijelom. Veličinu r koja predstavlja udaljenost dolazne zrake paralelne s osi x i osi x koja prolazi kroz središte tijela nazivamo "parametar upada".



Stoga se na neki način masivno tijelo ponaša poput leće. Zrake svjetlosti koje dolaze iz beskonačnosti i prolaze pokraj masivnog tijela, te imaju isti iznos parametar upada r , konvergiraju u nekoj točki uzduž osi na udaljenosti f_r od središta masivnog tijela. Opažatelj će u toj točki imati korist od ogromnog povećanja zbog gravitacijskog fokusiranja. U takvom se slučaju masivno tijelo koristi kao gravitacijski teleskop za pojačavanje udaljenih signala.

(T10.1) Razmotrite mogućnost korištenja našeg Sunca kao gravitacijskog teleskopa. Izračunajte najmanju udaljenost f_{min} od središta Sunca (u AJ) na kojoj se zrake svjetlosti mogu fokusirati. 6

(T10.2) Zamislite mali kružni detektor polumjera a smještenog na udaljenosti f_{min} kroz čije središte prolazi x os koja je okomita na detektor. Uočite da će samo zrake svjetlosti koje prolaze unutar određenog prstena oko Sunca širine h pasti na detektor. Faktor pojačanja kod detektora definiran je kao omjer intenziteta svjetlosti koja pada na detektor u prisutnosti Sunca i intenziteta svjetlosti bez Sunčeve prisutnosti. 8

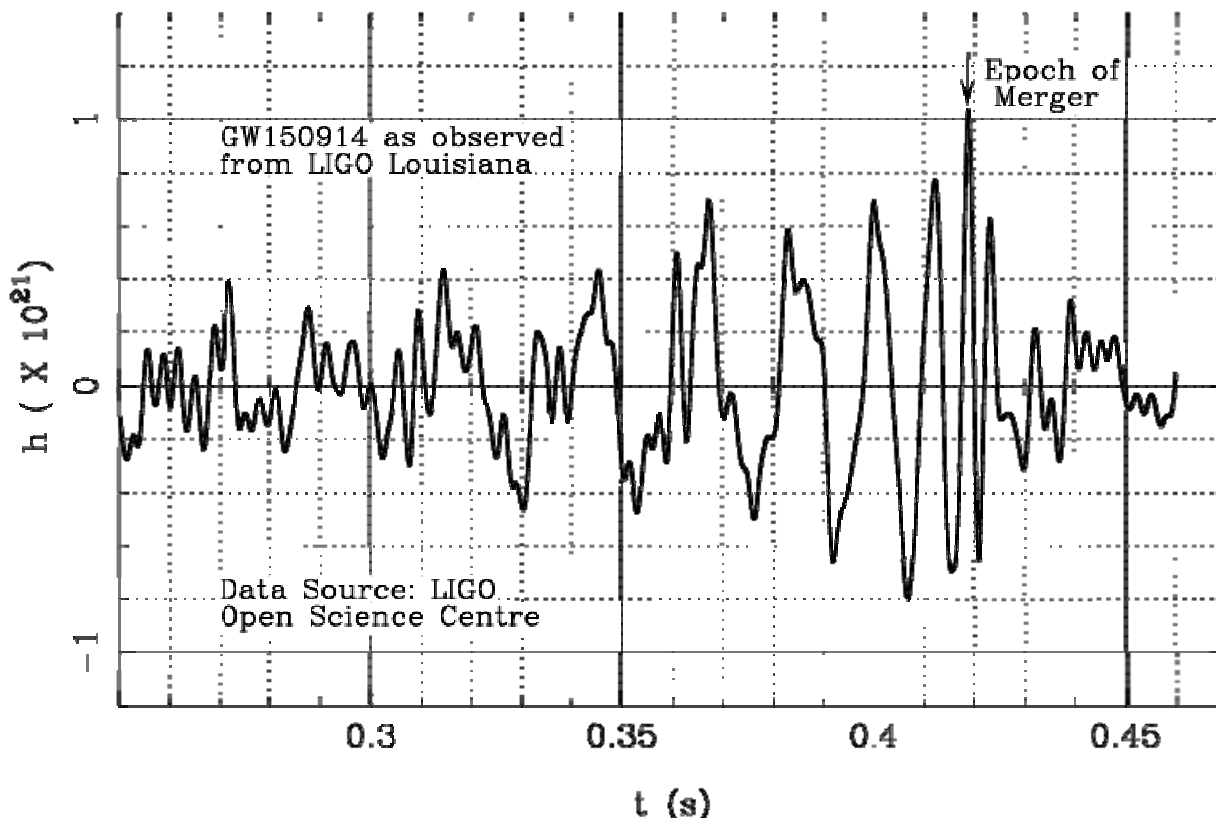
Izrazite faktor pojačanja A_m kod detektora kao funkciju R_{\odot} i a .

(T10.3) Zamislite sferičnu raspodjelu mase poput tamne tvari u jatu galaktika kroz koje zrake svjetlosti mogu proći i ujedno skreću zbog utjecaja gravitacijskog polja. Radi jednostavnosti uzmite da samo masa $M(r)$ koja se nalazi unutar polumjera r ima utjecaj na skretanje svjetlosti s parametrom upada r . 6

Kakva bi trebala biti raspodjela mase $M(r)$ da bi se gravitacijska leća ponašala kao idealna optička konveksna leća?

(T11) **Gravitacijski valovi**

Prvi signal nastao zbog gravitacijskih valova opažen je u rujnu 2015. g. pomoću dva napredna LIGO detektora u Hanfordu i Livingstonu u SAD-u. Jedno od tih mjerenja (parametar amplitude tijekom vremena izraženog u sekundama) prikazan je na donjoj slici. U ovom zadatku protumačiti ćemo taj signal preko male ispitne mase m u stazi oko velike mase M (tj. $m \ll M$) razmatrajući nekoliko modela prirode centralne mase.



Ispitna masa gubi energiju emitirajući gravitacijske valove. Kao rezultat toga, polumjer njene staze se stalno smanjuje sve dok ispitna masa ne dođe do površine drugog tijela ili, u slučaju crne rupe, do najmanje stabilne kružne staze - ISCO - za koju vrijedi $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{sch}}$, gdje je R_{sch} Schwarzschildov polumjer crne rupe. To je "razdoblje spajanja". U tom je trenutku amplituda gravitacijskog vala najveća, kao i frekvencija čiji je iznos uvijek dvostruko veći od frekvencije obilaska. U ovom zadatku bavit ćemo se samo gravitacijskim valovima prije spajanja, kada možemo pretpostaviti da vrijede Keplerovi zakoni. Nakon spajanja će se drastično promijeniti oblik gravitacijskih valova.

(T11.1) Razmatrajte opažene gravitacijske valove prikazane na slici gore. Odredite vremenski period T_0 i tako izračunajte frekvenciju f_0 gravitacijskih valova upravo prije razdoblja spajanja. 8

(T11.2) Za sve zvijezde glavnog niza (MS), polumjer zvijezde R_{MS} i njena masa M_{MS} povezani su sljedećim zakonom: 10

$$R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^\alpha$$

gdje je $\alpha = 0,8$ za $M_\odot < M_{\text{MS}}$
 $\alpha = 1,0$ za $0,08M_\odot \leq M_{\text{MS}} \leq M_\odot$

Ako je centralno tijelo bilo zvijezda glavnog niza, izrazite maksimalnu frekvenciju gravitacijskih valova f_{MS} preko mase zvijezde u jedinicama Sunčeve mase (M_{MS}/M_\odot) i α .

(T11.3) Koristeći prethodni rezultat odredite odgovarajuću vrijednost za α koja će dati maksimalnu moguću frekvenciju gravitacijskih valova $f_{\text{MS,max}}$ za bilo koju zvijezdu glavnog niza. Izračunajte tu frekvenciju. 9

(T11.4) Najveća masa bijelog patuljka (WD) iznosi $1,44M_{\odot}$ (poznata kao Chandrasekharova granica) i za nju vrijedi odnos mase i radijusa $R \propto M^{-1/3}$. Polumjer bijelog patuljka mase Sunca iznosi 6000 km. Odredite najveću frekvenciju emitiranih gravitacijskih valova $f_{WD,max}$ ako ispitna masa obilazi oko bijelog patuljka.

(T11.5) Neutronska zvijezda (NS) neobična je vrsta kompaktnog tijela čija se masa kreće između 1 i $3M_{\odot}$, a polumjer u području od 10 do 15 km. Odredite granice raspona frekvencija emitiranih gravitacijskih valova $f_{NS,min}$ i $f_{NS,max}$ ako ispitna masa obilazi oko neutronske zvijezde na udaljenosti bliskoj polumjeru neutronske zvijezde. 8

(T11.6) Ako ispitna masa obilazi oko crne rupe (BH), napišite izraz za frekvenciju emitiranih gravitacijskih valova f_{BH} iskazan preko mase crne rupe M_{BH} i mase Sunca M_{\odot} . 7

Koristeći se samo vremenskim periodom (ili frekvencijom) gravitacijskih valova prije razdoblja spajanja, odredite može li centralno tijelo biti zvijezda glavnog niza (MS), bijeli patuljak (WD), neutronska zvijezda (NS) ili crna rupa (BH). Označite kvačicom točan odgovor u listu za odgovore. Odredite masu tog objekta M_{obj} izraženu u jedinicama M_{\odot} . 5

(T12) Egzoplaneti

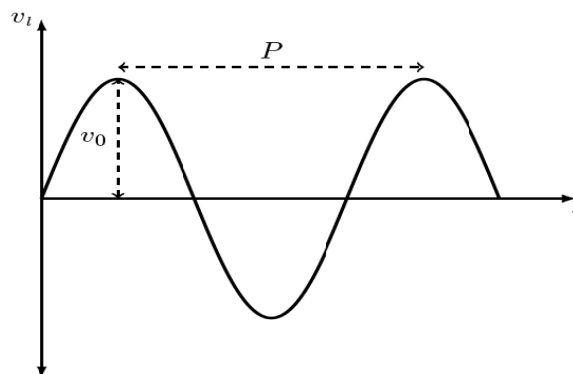
Dvije najvažnije metode za otkrivanje egzoplaneta (planeta oko drugih zvijezda) su metoda radijalne brzine i metoda tranzita. U ovom zadatku vidjeti ćemo kako spajanjem rezultata iz tih dviju metoda možemo otkriti mnogo informacija o egzoplanetu i njegovoj matičnoj zvijezdi.

Kroz cijeli ovaj zadatak razmatramo slučaj planeta mase M_p i polumjera R_p koji se giba po kružnoj stazi polumjera a oko zvijezde mase M_s (gdje je $M_s \gg M_p$) i polumjera R_s . Okomica na ravninu staze planeta nagnuta je za kut inklinacije i u odnosu na liniju doglednice ($i = 90^\circ$ znači da gledamo u ravnini staze). Pretpostavljamo da niti jedan drugi planet ne obilazi oko zvijezde i da je $R_s \ll a$.

Metoda radijalne brzine:

Kada se planet i zvijezda gibaju oko zajedničkog centra mase, može se opaziti maleno gibanje zvijezde jer centar mase zvijezde nije istovjetan centru mase sustava zvijezda-planet. Kao rezultat toga svjetlost koja dolazi sa zvijezde pokazuje mali Dopplerov učinak uzrokovan brzinom i smjerom tog gibanja.

Brzina gibanja v_1 u liniji doglednice zvijezde može se odrediti iz Dopplerovog učinka na znanu spektralnu liniju, a njena periodička promjena tijekom vremena t prikazana je na shematskom dijagramu dolje. Na dijagramu su prikazane dvije mjerljive vrijednosti u ovoj metodi, orbitalni period obilaska P i najveća brzina u smjeru doglednice v_0 .



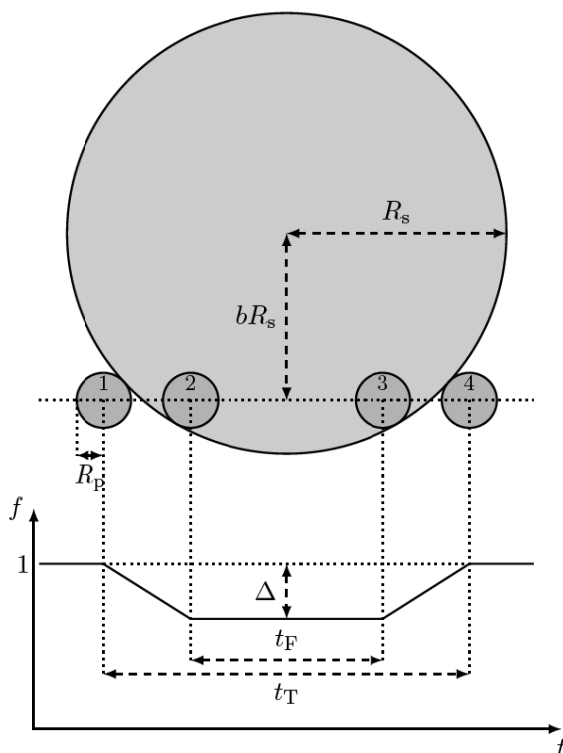
(T12.1) Izvedite izraze za polumjer staze (a) i orbitalnu brzinu (v_p) planeta izraženu preko M_s i P . 3

(T12.2) Izvedite izraz za donju granicu mase planeta $M_{p,min}$ izraženu preko M_s , v_0 i v_p . 4

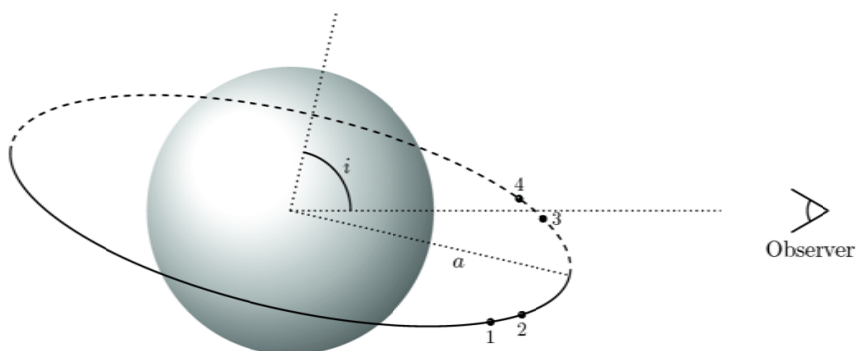
Metoda tranzita:

Ako je ravnina staze planeta položena blizu linije doglednice ($i \approx 90^\circ$), planet će, viđen od opažača, periodički prolaziti ispred diska zvijezde. Zbog toga će doći do malog, ali mjerljivog, smanjenja toka zračenja sa zvijezde. Shematski dijagram dolje (koji NIJE nacrtan u mjerilu) prikazuje situaciju gledanu iz perspektive opažača i rezultirajuću krivulju sjaja tranzita (normalizirani tok zračenja f u odnosu na vrijeme t) za jednoliko sjajan disk zvijezde.

Ako je kut inklinacije i točno 90° , vidjet ćemo planet kako prelazi preko diska zvijezde duž njenog promjera. Za druge vrijednosti i , kako je prikazano, tranzit se događa duž linije tetive čije središte se nalazi na udaljenosti bR_s od središta diska zvijezde. Tok zračenja zvijezde kad nema tranzita je normaliziran na 1, a najveći pad sjaja tijekom tranzita je označen s Δ .



Četiri važne točke tijekom tranzita su prvi, drugi, treći i četvrti kontakt, označeni tim redom na gornjoj slici brojevima od 1 do 4. Interval vremena između drugog i trećeg kontakta, kada se disk planeta u cijelosti nalazi na disku zvijezde, označen je s t_F . Interval vremena između prvog i četvrtog kontakta označen je s t_T . Navedene točke su također označene na shematskom dijagramu dolje koji prikazuje pogled "sa strane" na stazu planeta (NIJE nacrtano u mjerilu).



Vrijednosti koje možemo izmjeriti metodom tranzita su P , t_T , t_F i Δ .

(T12.3) Odredite za koje je vrijednosti i iskazane preko R_s i a tranzit vidljiv za udaljenog opažača.

(T12.4) Izrazite Δ preko R_s i R_p .

(T12.5) Izrazite t_T i t_F preko R_s , R_p , a , P i b .

2

1

8

- (T12.6) Pokažite da se parametar b , u slučaju da je staza mnogo veća nego polumjer zvijezde, približno može izračunati pomoću izraza: 5

$$b = \left[1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

- (T12.7) Uz odgovarajuću aproksimaciju, koristite rezultat iz točke (T12.6) kako biste izveli izraz za omjer a/R_s u jedinicama parametara tranzita koji se mogu izmjeriti. 3

- (T12.8) Kombinirajte rezultate metode radijalnih brzina i metode tranzita kako biste odredili srednju gustoću zvijezde $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$ u jedinicama t_T , t_F , Δ i P . 6

Stjenoviti ili plinoviti:

Razmotrimo sustav zvijezda-planet (kružna staza planeta) u slučaju da ga sa Zemlje opažamo u ravnini doglednice ($i = 90^\circ$). Poznato je da zvijezda ima masu $1,00M_\odot$. Tranziti su opažani u periodu (P) od 50,0 dana, pri čemu je ukupno trajanje tranzita (t_T) iznosilo 1,00 sat. Najveći pad sjaja tijekom tranzita (Δ) iznosi 0,0064. Isti sustav također je opažan metodom radijalnih brzina i pritom je maksimalna brzina u ravnini doglednice iznosila $0,400 \text{ ms}^{-1}$.

- (T12.9) Koliki je polumjer staze a planeta iskazan u AJ i u metrima. 2
- (T12.10) Koliki je omjer t_F/t_T ovog sustava. 2
- (T12.11) Izrazite masu M_p i polumjer R_p planeta u jedinicama mase Zemlje (M_\oplus), odnosno polumjera Zemlje (R_\oplus). Je li građa tog planeta sličnija stjenovitoj ili plinovitoj? Na listu za odgovore upišite kvačicu u odgovarajućoj kućici za stjenovit (ROCKY), odnosno plinovit (GASEOUS). 8

Krivulje sjaja tranzita sa zvjezdanim pjegama i zatamnjenjem ruba:

- (T12.12) Razmotrimo tranzit planeta kada je $i = 90^\circ$ oko zvijezde koja ima pjegu na njenom ekvatoru čija je veličina usporediva s veličinom planeta R_p . Period rotacije zvijezde iznosi $2P$. Ugrubo skicirajte grafove krivulje sjaja za pet uzastopnih tranzita planeta (na predlošcima koji su priloženi na listovima za odgovore). Kod pojedinih tranzita tok zračenja zvijezde kada nema tranzita može biti nezavisno jedinično normaliziran. Uzmite da planet ne susreće zvjezdanu pjegu prilikom prvog tranzita, no susreće je kod sljedećeg. 4

Kroz cijeli zadatak razmatrali smo jednoliko osvijetljen disk zvijezde. No, zvjezdani diskovi u stvarnosti imaju zatamnjenje rubova. Nacrtajte shematsku krivulju sjaja prilikom tranzita u slučaju da je prisutno zatamnjenje rubova zvijezde. 2