

(T1) IGAZ vagy HAMIS

A következő kérdések mindegyikéről dönts el, hogy igaz-e vagy hamis! Az Összesítő Válaszlapon jelöld a megfelelő rubrikába (TRUE = IGAZ / FALSE = HAMIS) a választ! Állításodat nem kell indokolni.

- (T1.1) Ha egy tiszta, teliholdas éjszakán elegendően hosszú expozíciós idejű felvételt készítünk az égboltról, annak színe ugyanolyan kék lesz, mint nappal. 2
- (T1.2) Egy csillagász Bhubaneswarban az év minden napján 05:00 UT-kor meghatározza a Nap helyzetét az égen. Ha a Föld forgástengelye merőleges lenne a pályasíkjára, ezek a pozíciók egy égi főköríven helyezkednének el. 2
- (T1.3) Ha a Nap körül az ekliptika síkjában keringő kisbolygó keringési periódusa kisebb, mint az Uránuszé, akkor pályájának teljes egészében az Uránusz pályáján belül kell elhelyezkednie. 2
- (T1.4) A Naprendszer tömegközéppontja mindig a Nap belsejébe esik. 2
- (T1.5) A szabadon mozgó foton impulzusa az Univerzum tágulása miatt csökken. 2

(T2) Gázok a Titán légkörében

A bolygók légkörét alkotó gázcseppkék sebessége széles tartományban változik. Ha a részecskék hőmozgásból származó közepes sebessége a szökési sebesség 1/6 részét meghaladja, ennek a gáznak nagy része a világűrbe távozik. Ideális egyatomos gázt feltételezve mi a minimális relatív atomtömeg (A_{\min}), ami esetén a gáz részecskéi a Titán légkörében maradnak?

A Titán tömege $M_T = 1.23 \times 10^{23}$ kg, sugara $R_T = 2575$ km, felszíni hőmérséklete pedig $T_T = 93.7$ K.

(T3) Korai Univerzum

A kozmológiai modellek szerint az Univerzumban a ρ_r sugárzási energiasűrűség $(1+z)^{-4}$ -nel, a ρ_m anyagsűrűség pedig $(1+z)^{-3}$ -nal arányos, ahol z a vöröseltolódás. Az Ω dimenzió nélküli sűrűségparaméter: $\Omega = \rho/\rho_c$, ahol ρ_c az Univerzum kritikus energiasűrűsége. A sugárzásnak és az anyagnak megfelelő sűrűségparaméterek mai értékei $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$, illetve $\Omega_{m_0} = 0.3$.

- (T3.1) Számítsd ki azt a z_e vöröseltolódást, amelynél a sugárzás és az anyag energiasűrűsége egyenlő! 3
- (T3.2) Feltéve, hogy a korai Univerzumból származó sugárzás spektruma a 2.732 K hőmérsékletű feketetest-sugárzásával modellezhető, határozd meg a sugárzás T_e hőmérsékletét a z_e vöröseltolódásnál! 4
- (T3.3) Határozd meg a z_e vöröseltolódásnál kibocsátott sugárzás fotonjainak jellemző E_ν energiáját eV-ban! 3

(T4) Árnyékok

Az északi féltekén egy megfigyelő azt tapasztalja, hogy egy 1.000 m hosszúságú függőlegesen álló bot legrövidebb árnyéka egyik nap 1.732 m volt. Ugyanezen a napon ugyanezen függőleges botnak a leghosszabb árnyékát 5.671 m-nek mérte.

Határozd meg a megfigyelő ϕ földrajzi szélességét és a Nap δ_\odot deklinációját ezen a napon!

(T5) GMRT nyalábtranzit

A világ egyik legnagyobb, méteres hullámhosszakon dolgozó rádiótvésző-rendszere, a GMRT (Giant Metrewave Radio Telescope) India nyugati részén (földrajzi szélesség: $19^\circ 6' \text{ É}$, földrajzi hosszúság: $74^\circ 3' \text{ K}$) található. A GMRT-nek 30 antennatányérja van, mindegyik átmérője 45.0 m. A GMRT egyik antennáját a meridián északi része mentén $39^\circ 42'$ zenittávolságra állították, és rögzítették, hogy megfigyeljék egy pontszerű forrás átvonulását a nyalábkúp átmérője mentén, miközben áthalad a meridiánon.

Mennyi az a T_{transit} idő, amíg a forrás az adott, 200 MHz frekvencián észlelő GMRT-antenna nyalábkúpjának félértékszélességén (FWHM) belül tartózkodik?

Segítség: Egy adott frekvencián mérő rádióantenna nyalábkúpjának félértékszélessége az antenna szögfelbontásával egyezik meg. Tegyük fel, hogy az antenna „megvilágítása” egyenletes, azaz a sugárzás intenzitásának eloszlása a tányér mentén állandó.

(T6) **Cefeida-pulzáció**

A β Doradus cefeida típusú változócsillag pulzációs periódusa 9.84 nap. Élünk azzal az egyszerűsítő feltevéssel, hogy a csillag akkor a legfényesebb, amikor a sugara a legkisebb (R_1), és akkor a leghalványabb, amikor a sugara a legnagyobb (R_2). Szintén az egyszerűség kedvéért tegyük fel azt is, hogy a csillag alakja a pulzációs ciklus során végig gömb alakú marad, sugárzása pedig minden pillanatban feketetest-sugárzásnak tekinthető. A csillag bolometrikus fényessége 3.46 és 4.08 magnitúdó között változik. Doppler-mérésekből tudjuk, hogy a pulzáció során a csillag felszíne 12.8 km s^{-1} átlagos radiális sebességgel tágul és húzódik össze. A pulzációs periódus során a hőmérsékleti sugárzás intenzitás-maximumának helye 531.0 nm és 649.1 nm között változik.

- (T6.1) Határozd meg a csillag legkisebb és legnagyobb sugarának arányát (R_1/R_2)! 7
- (T6.2) Határozd meg a csillag legkisebb és legnagyobb sugarának (R_1 és R_2) értékét méterben! 3
- (T6.3) Számítsd ki a csillag fluxusát a legnagyobb kiterjedésekor (F_2)! 5
- (T6.4) Határozd meg a csillag D_{star} távolságát parszekben! 5

(T7) **Távcsőoptikai feladat**

Egy $f/5$ fényerejű lencsés távcső objektívjének fókusz-távolsága 100 cm, az okuláré pedig 1 cm.

- (T7.1) Mekkora a távcső m_0 nagyítása? Mekkora a távcső L_0 hossza, azaz az objektív és az okulár közötti távolság? 4

Gyakran alkalmazott módszer, hogy az objektív és a gyújtópontja közé egy konkáv (homorú) lencsét (Barlow-lencse) helyeznek, mert így a távcső hosszának lényeges növekedése nélkül lehet növelni a nagyítást. Egy 1 cm fókusz-távolságú Barlow-lencsének az objektív és az okulár közé illesztésével a nagyítást megduplázzuk.

- (T7.2) A gyújtóponttól mekkora d_B távolságban kell elhelyezni a Barlow-lencsét a kívánt nagyításnövekedés eléréséhez? 6
- (T7.3) Mekkora ΔL értékkel nő a távcső hossza? 4

Az objektívet megtartva vegyük ki a Barlow-lencsét és okulárt, és helyezzünk a gyújtópontba egy CCD detektort, amelynek a pixelmérete 10 μm .

- (T7.4) Ha két csillag $20''$ távolságra van egymástól az égen, hány pixel lesz a távolság a csillagok képeinek középpontja között? 6

(T8) **Fotometria az U sávban**

Egy csillag látszó fényessége az U sávban $m_U = 15.0$ magnitúdó. Az U szűrő ideális, azaz az áteresztő képessége 100% a sávon belül, 0% azon kívül. A szűrő 360 nm-re centrált, szélessége pedig 80 nm. Tegyük fel, hogy a csillag frekvencia szerinti spektrális energiaeloszlása is állandó. Bármely sávban a csillag m fényessége és J_ν -ben (jansky, $1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$) adott f fluxussűrűsége között a következő összefüggés áll fenn:

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy}$$

- (T8.1) Adjunk becslést a Föld légkörének határán 1 m^2 felületen, a felületre merőlegesen másodpercenként áthaladó, U sávba eső fotonok N_0 számára! 8

A csillagot egy 2.0 m tükörátmérőjű földi távcsővel észleljük az U sávban. Az észlelés során az U sávban a légkör elnyelése 50%. Tegyük fel, hogy a felbontást csak a diffrakció korlátozza! Az U sávban az éjszakai égbolt átlagos felületi fényessége a mérések szerint $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$.

- (T8.2) Mekkora a csillagról és az égi háttérről másodpercenként érkező fotonok számának R aránya, ha a fotonok egy $2''$ átmérőjű, kör alakú apertúrán (nyíláson) keresztül érkeznek a detektorra? 8
- (T8.3) A gyakorlatban az U sávban érkező és a főtükörre eső fotonoknak csak 20%-át tudjuk detektálni. Mekkora a csillagról másodpercenként detektált fotonok N_t száma? 4

(T9) Mars Orbiter Mission

Az indiai MOM (Mars Orbiter Mission) űrszondát 2013. november 5-én bocsátották fel egy PSLV (Polar Satellite Launch Vehicle) rakétával. A MOM szonda üzemanyag nélküli (szonda + műszerek) tömege 500 kg volt, és 852 kg üzemanyagot vitt magával. Először olyan elliptikus pályára állították, amelynek a perigeuma 264.1 km, az apogeuma pedig 23903.6 km magasságban volt a földfelszín felett. A pálya hatszori emelése után a MOM-ot a Mars felé vezető pályára (Hohmann-pálya) mozgatták.

Az első pályaeeléshez a perigeum közelében nagyon rövid ideig működtették a hajtóművet, amelynek következtében csak a pálya alakja és mérete változott, a pályasík és abban a perigeum helyzete nem. A manőver során az eszköz összesen $1.73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$ impulzust kapott. Az üzemanyag égetése miatti tömegcsökkenést hanyagoljuk el!

(T9.1) Mekkora a hajtómű működtetése utáni új apogeumnak a Föld felszíne feletti h_a magassága? 14

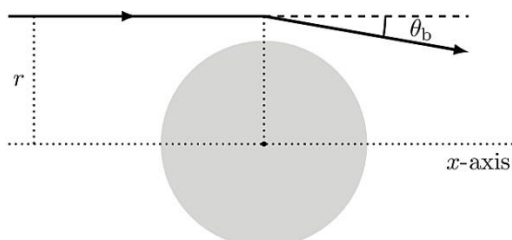
(T9.2) Határozzuk meg az égetés utáni új pálya excentricitását (e) és a MOM új keringési periódusát (P) órákban! 6

(T10) Gravitációs-lencse-teleszkóp

Az Einstein-féle általános relativitáselmélet előrejelzése szerint a nagy tömegű testek mellett elhaladó fénysugár elhajlik. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az elhajlás minden fénysugárra egyetlen pontban történik meg, ahogyan azt az ábrán látjuk. Az elhajlás θ_b szögére a következő összefüggés adott:

$$\theta_b = \frac{2R_{sch}}{r}$$

ahol R_{sch} a lencséző test Schwarzschild-sugara. A beeső fénysugár és a vele párhuzamos, a test középpontján áthaladó x tengely r távolsága az ún. „ütközési paraméter”.



Így egy nagy tömegű test sok tekintetben úgy viselkedik, mint egy gyűjtőlencse. A nagy tömegű test mögül végtelen nagy távolságból érkező, ugyanakkora r ütközési paraméterű fénysugarak mindegyike a tengelyen lévő, a nagy tömegű test középpontjától f_r távolságban elhelyezkedő pontba tart. Az ebben a pontban helyet foglaló megfigyelő a gravitációs lencsézésnek köszönhetően nagy fényességnövekedést tapasztalhat. A nagy tömegű test a távoli források jelét gravitációs-lencse-távcsőként felerősíti.

(T10.1) Vizsgáld meg, milyen gravitációs-lencse-teleszkóp a Nap! Határozd meg csillagászati egységben a Nap középpontjától mért legkisebb távolságot (f_{min}), ahova a fénysugarak fókuszálódhatnak! 6

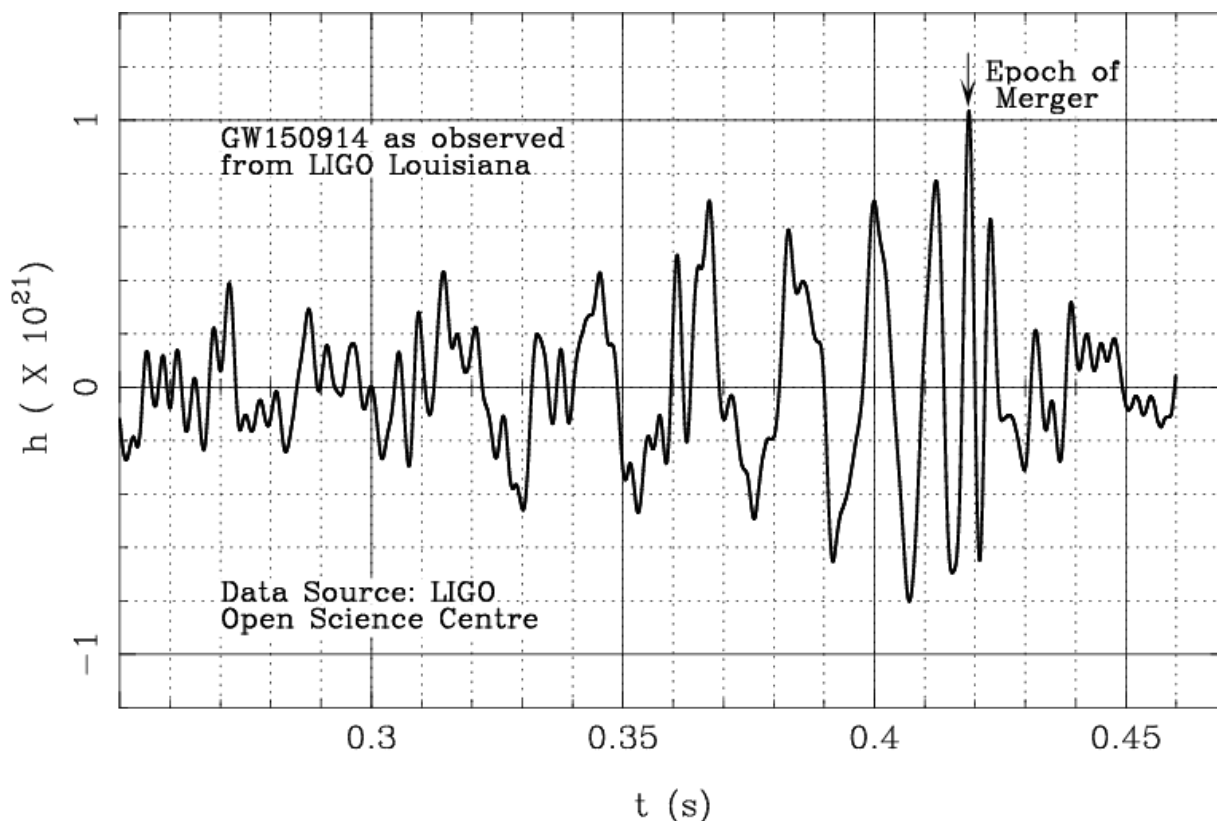
(T10.2) Helyezzünk el egy kicsiny kör alakú, a sugarú detektort az x tengely mentén a Nap középpontjától f_{min} távolságra a tengelyre merőlegesen! A detektort csak azok a fénysugarak érik el, amelyek a Nap körüli h vastagságú (ahol $h \ll R_{\odot}$) gyűrűn haladtak át. Az erősítési tényező a Nap által eltérített, detektort elérő fénysugarak és azon fénysugarak intenzitásának aránya, amelyeket a detektor akkor érzékel, amikor a Nap máshol tartózkodik. 8

Fejzd ki a detektornál mérhető A_m erősítési tényezőt az R_{\odot} és az a függvényében!

(T10.3) Tekintsünk egy gömbszimmetrikus tömegeloszlású anyagcsomót – ilyen például a sötét anyag eloszlása a galaxishalmazokban – amely elhajlítja a rajta áthaladó fénysugarakat! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az r ütközési paraméterű gravitációs fényelhajlás szempontjából csak az r sugáron belüli $M(r)$ tömeg számít! Határozd meg azt az $M(r)$ tömegeloszlást, amelynél a gravitációs lencse úgy viselkedik, mint egy ideális optikai gyűjtőlencse! 6

(T11) Gravitációs hullámok

Gravitációs hullámokat először 2015 szeptemberében észleltek az egyesült államokbeli Hanfordban és Livingstone-ban működő aLIGO detektorokkal. A mérések egyikét (amplitúdó a másodpercekben adott idő függvényében) a mellékelt ábra mutatja. A feladatban a jelet egy M tömegű nagy test és a körülötte keringő m tömegű kicsiny test (próbatest, $m \ll M$) kölcsönhatásának tulajdonítjuk, a központi tömeg természetére vonatkozó több modellt is megvizsgálva.



A próbatest a gravitációs hullámok kibocsátása miatt energiát veszít, aminek következtében pályamérete folyamatosan csökken, míg el nem éri a központi test felszínét, vagy fekete lyuk esetében a legbelső stabil körpályát (innermost stable circular orbit, ISCO), amelynek sugara $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{Sch}}$, ahol R_{Sch} a fekete lyuk Schwarzschild-sugara. Ez az „összeolvadás pillanata” („epoch of merger”). Ebben a pillanatban a gravitációs hullám amplitúdója és a frekvenciája is maximális, utóbbi egyébként mindig a keringési frekvencia kétszerese. A feladatban csak az összeolvadás előtti gravitációs hullámokra koncentrálunk, és érvényesnek tekintjük a Kepler-törvényeket. Az összeolvadás után a gravitációs hullámok jelalakja jelentősen megváltozik.

(T11.1) Tekintsük az ábrán látható észlelt gravitációshullám-jelet. Adj becslést a T_0 periódusra, ebből pedig számold ki a gravitációs hullámoknak közvetlenül az összeolvadás előtti f_0 frekvenciáját! 3

(T11.2) A fősorozati csillagokra (main sequence, MS) a csillag R_{MS} sugara és M_{MS} tömege között a következő, hatványfüggvény alakú összefüggés érvényes (a képletben a jel egyenes arányosságot jelöl): 10

$$R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^\alpha$$

$$\text{ahol } \alpha = \begin{cases} 0.8 & \text{ha } M_\odot < M_{\text{MS}} \\ 1.0 & \text{ha } 0.08M_\odot \leq M_{\text{MS}} \leq M_\odot \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy a központi test egy fősorozati csillag! Írj fel összefüggést a gravitációs hullámok f_{MS} maximális frekvenciájára a csillag naptömegben kifejezett tömege (M_{MS}/M_\odot) és az α felhasználásával!

(T11.3) A fenti eredményt felhasználva határozd meg α azon értékét, amelynél tetszőleges fősorozati csillagra a gravitációs hullámok lehetséges frekvenciája a maximális! Számítsd ki ezt a frekvenciát! 9

(T11.4) A fehér törpe (white dwarf, WD) csillagok maximális tömege $1.44 M_{\odot}$ (ez az ún. Chandrasekhar-határ), a tömeg és sugár közötti összefüggésük pedig $R \propto M^{-1/3}$. Egy naptömegű fehér törpe sugara 6000 km. Határozd meg a kisugárzott gravitációs hullámok $f_{WD,max}$ legnagyobb frekvenciáját, ha a próbatest egy fehér törpe körül kering!

(T11.5) A neutroncsillagok (neutron star, NS) különleges kompakt objektumok, amelyek tömege 1 és $3M_{\odot}$, sugaruk pedig 10 – 15 km közötti. Határozd meg a kisugárzott gravitációs hullámok frekvenciájának $f_{NS,min}$ és $f_{NS,max}$ szélsőértékeit, ha a próbatest egy neutroncsillag körül kering, annak sugarával majdnem megegyező távolságban!

(T11.6) Tegyük fel, hogy a próbatest egy fekete lyuk (black hole, BH) körül kering! Írj fel összefüggést a kibocsátott gravitációs hullámok f_{BH} frekvenciájára a fekete lyuk M_{BH} és a Nap M_{\odot} tömegével kifejezve!

(T11.7) A gravitációs hullámok összeolvadás előtti periódusa (vagy frekvenciája) segítségével határozd meg, hogy a központi égitest vajon fősorozati csillag (MS), fehér törpe (WD), neutroncsillag (NS) vagy fekete lyuk (BH) lehet-e! Jelöld be a helyes választ az Összesítő Válaszlappon! Adj becslést az objektum M_{obj} tömegére az M_{\odot} naptömeggel kifejezve!

(T12) Exobolyók

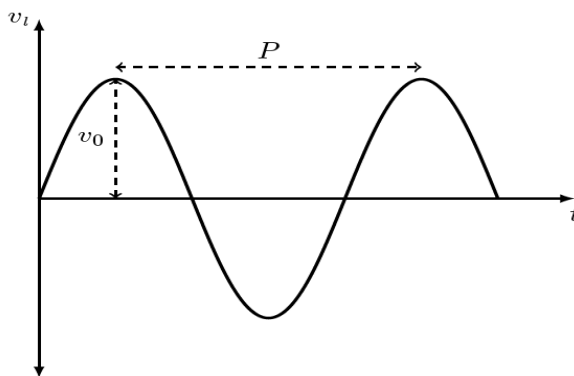
Az exobolygók (más csillagok körül keringő bolygók) detektálásának két legfontosabb módszere a radiális sebesség mérésén és a bolygótranszitok megfigyelésén alapuló eljárás. A feladatban annak járunk utána, hogy a két módszer eredményeinek kombinálásával hogyan deríthetünk ki sok-sok információt a keringő bolygóról és gazdacsillagáról.

A feladatban végig a következő problémát vizsgáljuk: egy M_p tömegű és R_p sugarú bolygó a sugarú körpályán kering az M_s ($M_s \gg M_p$) tömegű és R_s sugarú csillag körül. A bolygó pályasíkjának normálisa i szöget zár be a látóiránnyal ($i = 90^\circ$ esetén ún. „éléről látszó” – „edge on” – pályáról beszélünk). Tegyük fel, hogy a csillag körül nem kering további bolygó, és $R_s \ll a$!

A radiális sebesség-módszer:

A bolygó és a csillag a kettős rendszer tömegközéppontja körül kering, ezért a csillagot „imbolyogni” látjuk, mivel a csillag tömegközéppontja nem esik egybe a csillag-bolygó rendszer tömegközéppontjával, amelyhez képest a csillag is mozog. A sebességváltozás miatt a csillagról hozzánk érkező fény kicsiny Doppler-eltolódást szenved.

A csillag v_l látóirányú sebessége ismert színeképvonalak Doppler-eltolódásából határozható meg, ennek a t idő szerinti periodikus változását az alábbi szematikus ábra mutatja. Az ábrán a módszer két mérhető paraméterét, a P keringési periódust és a radiális sebesség v_0 maximális értékét is feltüntettük.



(T12.1) Vezessük le összefüggést a pályasugár (a) és a pálya menti sebesség (v_p) között az M_s és a P segítségével!

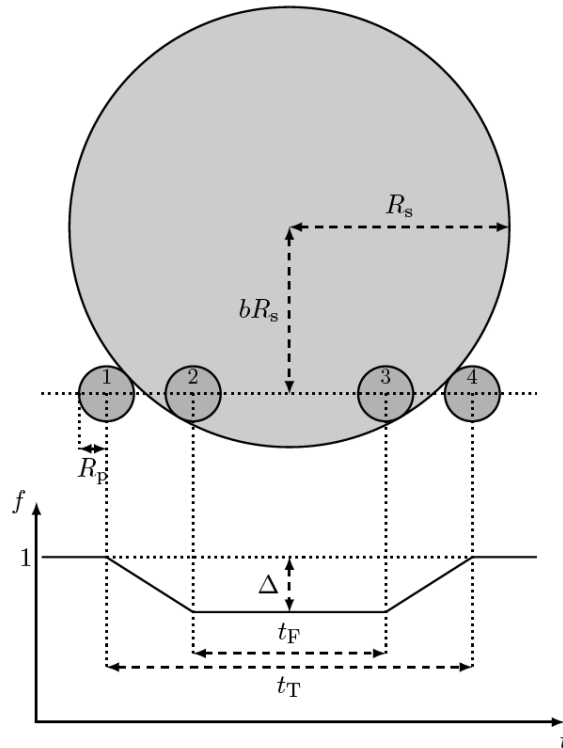
(T12.2) Határozzuk meg a bolygó tömegének alsó határát ($M_{p,min}$) az M_s , v_0 és v_p függvényében!

Tranzitmódszer:

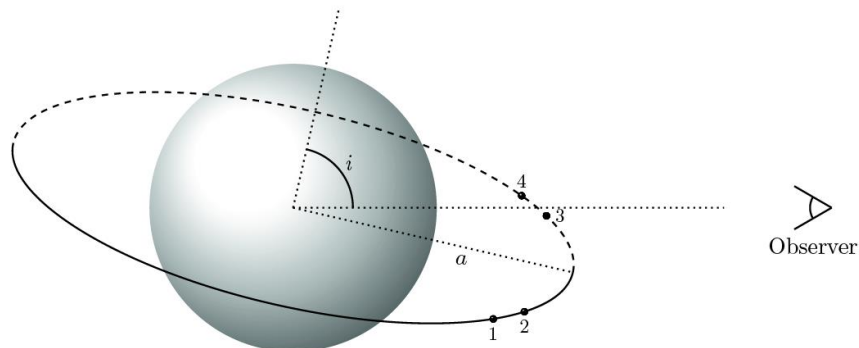
Ha a csillaga körül keringő bolygó pályasíkja majdnem éléről látszik ($i \approx 90^\circ$), a bolygó a Földről nézve periodikusan elhalad a csillag korongja előtt („transzit”). Ez kicsiny csökkenést eredményez a csillag

fluxusában, ami mérhető. Az alábbi (NEM méretarányos) ábra a megfigyelő szempontjából mutatja ezt, illetve az eredmény fénygörbét (f 1-re normált fluxus a t idő függvényében) egyenletes fényességű csillagkorongra.

Ha az i pályahajlás pontosan 90° , a bolygó éppen az átmérő mentén vonul át a csillag korongja előtt. i más értékeire a tranzit egy húr mentén zajlik, amelynek felezőpontja bR_s távolságra van a csillagkorong középpontjától, ahogyan az ábra is mutatja. A tranziton kívül mérhető fluxus értéke 1-re normált, a tranzit maximális mélységét pedig Δ jelöli.



A tranzit négy legfontosabb pontja az első, második, harmadik és negyedik kontaktus, ezek helyzetét a fenti ábrán 1-től 4-ig terjedő számok jelzik. A második és harmadik kontaktus között eltelt időt jelölje t_F , ebben az intervallumban a bolygó korongja teljes egészében a csillag korongja előtt van. Az első és negyedik kontaktus közötti időt jelölje t_T . Ezeket a pontokat szintén megjelöltük a pályát mutató alábbi (NEM méretarányos) ábrán.



A tranzitmódszer mérhető paraméterei a P , t_T , t_F és Δ .

(T12.3) Adj feltételt R_s és a függvényében i -re úgy, hogy egy távoli észlelő tranzitot figyelhessen meg! 2

(T12.4) Fejezd ki Δ -t R_s és R_p függvényében! 1

(T12.5) Fejezd ki t_T -t és t_F -et R_s , R_p , a , P és b függvényében! 8

- (T12.6) Ha a pálya mérete sokkal nagyobb, mint a csillag sugara, mutasd meg, hogy a b paraméter a következő módon fejezhető ki: 5

$$b = \left[1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

- (T12.7) A (T12.6) rész eredményét felhasználva vezess le összefüggést az a/R_s arányra a mérhető tranzitparaméterekkel kifejezve! Alkalmazz megfelelő közelítést! 3

- (T12.8) A radiálissebesség- és a tranzitmódszer eredményeit kombinálva határozd meg a csillag $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$ közepes sűrűségét a t_T , t_F , Δ és P függvényében! 6

Kőzet- vagy gázbolygó:

Tekintsünk egy, a Földről éléről látható ($i = 90^\circ$) csillag-bolygó rendszert (a bolygó körpályán kering)! Tudjuk, hogy a gazdacsillag tömege $1.00M_\odot$. A tranzitok 50.0 nap periódussal (P) követik egymást, teljes hosszuk (t_T) pedig 1.00 óra. A tranzit mélysége (Δ) 0.0064. A rendszerről radiálissebesség-méréseink is vannak, ebből tudjuk, hogy a látóirányú maximális sebesség 0.400 ms^{-1} .

- (T12.9) Határozd meg a bolygó a pályasugarát csillagászati egységben és méterben is! 2
- (T12.10) Határozd meg a t_F/t_T arányt a rendszerre! 2
- (T12.11) Számítsd ki a bolygó M_p tömegét és R_p sugarát a Föld tömegével (M_\oplus) és sugarával (R_\oplus) kifejezve! Vajon kőzet- vagy inkább gázbolygóról lehet-e szó? Az Összesítő Válaszlapon tegyél jelet a megfelelő rubrikába (ROCKY = KŐZET- / GASEOUS = GÁZBOLYGÓ)! 8

A tranzit fénygörbéje csillagfoltok jelenlétében és a szélsötétedés figyelembe vételével:

- (T12.12) Vizsgáljunk meg egy bolygótranzitot ($i = 90^\circ$) egy csillag körül, amelynek egyenlítőjén van egy, a bolygó R_p sugarával összemérhető nagyságú csillagfolt! A csillag forgási periódusa $2P$. Rajzold fel öt egymást követő tranzit sematikus fénygörbéit az Összesítő Válaszlapon található üres grafikonokra. A tranziton kívüli fluxusokat egymástól függetlenül 1-re normálhatod. Tegyük fel, hogy az első tranzit közben a bolygó nem kerül a csillagfolt elé, a második esetében azonban igen. 4
- (T12.13) A megoldás során végig feltettük, hogy a csillagkorong fényessége egyenletes. Valójában azonban a csillagok korongja a szélek felé sötétedik. Rajzold fel a tranzit sematikus fénygörbéjét, ha a gazdacsillag szélsötétedését is figyelembe vesszük! 2