

**(T1) Verdadero (True) o Falso (False)**

Determine si cada una de las siguientes argumentos es verdadero o falso. En la hoja de respuestas (Summary Answersheet), con una paloma indique su respuesta (VERDADERO/FALSO) para cada argumento. NO es necesario hacer una justificación para cada pregunta.

(T1.1) En una fotografía del cielo claro de noche de luna llena con una exposición suficientemente larga, el color del cielo aparecerá azul como si fuera de día. 2

(T1.2) Un astrónomo en Bhubaneswar marca la posición del Sol que se encuentra en el cielo a las 5:00 UT todos los días del año. Si los ejes del Tierra fueran perpendiculares a su plano de órbita, estas posiciones trazarían un gran arco dec círculo. 2

(T1.3) Si el periodo de órbita de un cierto cuerpo pequeño que se encuentra alrededor del Sol en un plano elíptico menor que el periodo de órbita que de Urano, entonces su órbita debe necesariamente encontrarse completamente dentro de la órbita de Urano. 2

(T1.4) El centro de masa del sistema solar esta dentro del Sol en todo tiempo. 2

(T1.5) Un fotón se esta moviendo en el espacio libre. A manera que el Universo se expande, su momento decrece. 2

**(T2) Gases en Titan**

Las partículas de un gas en la atmósfera planetaria tienen una amplia distribución de velocidad. Si la media cuadrática (r.m.s) de la velocidad térmica de las partículas de un gas en particular es mayor o igual a un sexto (1/6) de la velocidad de escape, entonces la mayoría del gas escapará del planeta. ¿Cuál es el peso atómico mínimo (relativo a la masa atómica),  $A_{min}$ , de un gas real monoatómico para que se mantenga dentro de la atmósfera de Titan? 10

Asuma que la masa de Titan es  $M_T=1.23 \times 10^{23}$  kg, el radio de Titan es  $R_T=2575$  km, la temperatura superficial de Titan  $T_T=93.7$  K.

**(T3) Universo Temprano**

Los modelos cosmológicos indican que la densidad de radiación de la energía,  $\rho_r$ , en el universo es proporcional a  $(1+z)^4$ , y la densidad de energy,  $\rho_m$ , es porporcional a  $(1+z)^3$ , donde  $z$  es el corrimiento al rojo. El parametro adimensional de la densidad,  $\Omega$ , está dado por  $\Omega=\rho/\rho_c$ , donde  $\rho_c$  es la densidad crítica de la energía del universo. En el universo presente, los parámetros de densidad correspondientes a la radiación y a la materia son  $\Omega_{r0}=10^{-4}$  y  $\Omega_{m0}=0.3$ , respectivamente.

(T3.1) Calcule el corrimiento al rojo,  $z_e$ , en donde la radiación y la densidad de materia de energía son iguales. 3

(T3.2) Asumiendo que la radiación del universo temprano tiene un espectro de cuerpo negro con un pico de temperatura de 2.732 K, estime la temperatura,  $T_e$ , de la radiación en el corrimiento al rojo  $z_e$ . 4

(T3.3) Estime la energía típica de un fotón,  $E_v$  (en eV), de la radiación en el corrimiento al rojo  $z_e$ , que es recibida por un observador en la actualidad. 3

**(T4) Sombras**

Un observador que se encuentra en el hemisferio norte, se da cuenta que la sombra más corta de una vara de 1.000m en el día es de 1.732 m. En el mismo día, la longitud más larga de la sombra de la misma vara es de 5.671 m. 10

Encuentre la latitud,  $\Phi$ , en la que se encuentra el observador y la declinación del sol,  $\delta_o$ , de dicho día. Consider al Sol como un objeto puntual e ignore la refracción atmosférica.

**(T5) Tránsito de haz en GMRT**

10

Giant Metrewave Radio Telescope (GMRT), uno de los radiotelescopios más largos que hay en el mundo en longitudes de onda en metros, se encuentra al oeste de la India (latitud:  $19^{\circ}06'$  N, longitud:  $74^{\circ}03'$  E). GMRT consiste en un armado de 30 discos de antenas, donde cada una tiene un diámetro de 45.0 m. Un solo disco de GMRT se ha mantenido fijo con su eje apuntando hacia el cenit con un ángulo de  $39^{\circ}42'$  a lo largo de meridiano norte, tal que la fuente puntual de radio podría pasar a lo largo del diámetro del haz, cuando está transitando el meridiano.

¿Cuál es la duración  $T_{\text{transit}}$ , para cada fuente que se encuentre en el FWHM (anchura a media altura o en inglés Full Width at Half Maximum) del haz de un solo disco de GMRT que observa a 200 MHz?

**Hint:** FWHM es el tamaño del haz de una antena de radio una frecuencia dada, corresponde a la resolución angular del disco. Asume una iluminación uniforme.

**(T6) Pulsación de una Cefeida**

La estrella -Doradus es una estrella variable Cefeida con periodo de pulsación de 9.84 días. A modo de simplificación, suponemos que la estrella es más brillante cuando está más contraída (teniendo como radio  $R_1$ ) y más débil cuando alcanza su máxima expansión (con radio  $R_2$ ). Por simplicidad, asuma que la estrella mantiene forma esférica y que se comporta como cuerpo negro en todo momento. La magnitud bolométrica de la estrella varía de 3.64 a 4.08. De mediciones de efecto Doppler, se sabe que durante la pulsación la superficie de la estrella se expande o contrae con velocidad radial promedio de  $12.8 \text{ km s}^{-1}$ . Sobre el periodo de pulsación, el máximo de radiación térmica (intrínseca) varía de 531.0 nm a 649.1 nm.

- (T6.1) Encuentra la razón entre los radios máximos y mínimos ( $R_1/R_2$ ). 7
- (T6.2) Encuentra los radios de la estrella (en metros) en sus estados de máxima contracción y expansión ( $R_1 \wedge R_2$ ). 3
- (T6.3) Calcula el flujo de la estrella,  $F_2$ , cuando está en su estado de máxima expansión. 5
- (T6.4) Encuentra la distancia a la estrella,  $D_{\text{star}}$ , en parsecs. 5

**(T7) Óptica de un telescopio**

En un telescopio refractor ideal de radio focal  $f/5$ , la distancia focal de la lente objetivo es 100 cm y la del ocular es 1 cm.

- (T7.1) ¿Cuál es la magnificación angular,  $m_o$ , del telescopio? ¿Cuál es la longitud del telescopio,  $L_o$ , i.e. la distancia entre el objetivo y el ocular? 4

Una forma común de aumentar la magnificación sin un gran aumento en la longitud del telescopio, es por medio de la introducción de una lente cóncava (lente Barlow) entre la lente del objetivo y el foco primario. Se introduce una lente Barlow de 1 cm longitud focal entre el objetivo y el ocular para duplicar la magnificación.

- (T7.2) ¿A qué distancia,  $d_b$ , medida desde el foco primario, debe colocarse la lente Barlow para obtener la magnificación doble? **from the prime focus must the Barlow lens be kept in order to obtain this desired double magnification?** 6
- (T7.3) ¿Cuál es el incremento,  $\Delta L$ , en la longitud del telescopio? 4

Ahora, el telescopio es construido con el mismo objetivo y un detector CCD colocado en el foco primario (sin lente Barlow ni ocular). El tamaño de cada pixel del detector CCD es  $10 \mu\text{m}$ .

- (T7.4) ¿Cuál será la distancia en pixeles,  $n_p$ , entre los centroides de la imagen de las dos estrellas, en el CCD, si se encuentran a una distancia angular de  $20''$  en el cielo? 6

**(T8) Fotometría de Banda U**

Una estrella tiene magnitud aparente  $m_U=15.0$  en la Banda U. El filtro de Banda es ideal, i.e. tiene transmisión perfecta (100%) dentro de la banda y es completamente opaco (0% transmisión) fuera de esta. El filtro está centrado en 360 nm, y tiene un ancho de 80nm. Se asume que el espectro de energía de la estrella es plano respecto a la frecuencia. La conversión entre la magnitud,  $m$ , en cualquier banda, y la densidad de flujo de la estrella,  $f$ , en Jansky ( $1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$ ), está dado por,

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy.}$$

- (T8.1) ¿Aproximadamente, cuántos fotones,  $N_0$ , de la banda U de esta estrella incidirán normalmente en una superficie de  $1 \text{ m}^2$  en el borde superior de la atmosfera de la Tierra cada segundo? 8

Esta estrella se está observando en la banda U usando un telescopio en tierra firme, cuyo espejo primario tiene un diámetro de 2.0 m. La extinción atmosférica en la banda U durante la observación es 50. Puedes asumir que el campo de visión está limitado por difracción. Se midió el brillo superficial promedio del cielo de noche en la banda U, y se determinó que es de  $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$ .

- (T8.2) Cual es la razón,  $R$ , del número de fotones de la estrella recibidos por segundo respecto a los recibidos del cielo, al ser medidos con una apertura circular de 2" de diámetro? 8
- (T8.3) En la práctica, sólo 20% de los fotones de la banda U que han caído en el espejo principal son detectados. ¿Cuántos fotones,  $N_t$ , de la estrella son detectados por segundo? 4

**(T9) Mars Orbiter Mission**

La Misión de Órbita de Marte (MOM) de India fue lanzada usando el Vehículo de Lanzamiento Polar de Satélites (PSLV en inglés) el 5 de noviembre de 2013. La masa seca de MOM (cuerpo + instrumentos) fue de 500 kg y llevaba 852 kg de combustible. Inicialmente, fue colocada en una órbita elíptica alrededor de la Tierra con perigeo a una altura de 264.1 km y apogeo a una altura de 23903.6 km, sobre la superficie de la Tierra. Tras aumentar seis veces la órbita, MOM fue transferida a una órbita de transferencia a Marte (órbita de Hohmann).

El primer aumento de órbita fue realizado activando los motores por un lapso de tiempo muy corto cerca del perigeo. El motor fue activado para cambiar la órbita sin cambiar el plano orbital y sin cambiar el perigeo. Esto le dio un impulso neto de  $1.73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$  al satélite. Ignore el cambio en la masa debido al combustible quemado.

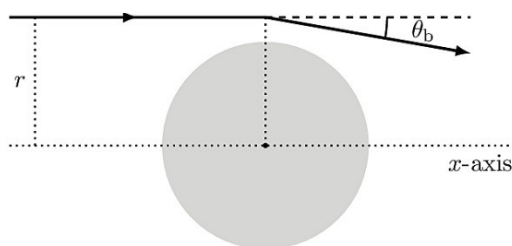
- (T9.1) ¿Cuál es la altura del nuevo apogeo,  $h_a$ , sobre la superficie de la Tierra, después del uso de los motores? 14
- (T9.2) Encontrar la excentricidad,  $e$ , de la nueva orbita tras el impulso, y el nuevo periodo orbital,  $P$ , de MOM en horas. 6

**(T10) Telescopio de Lente Gravitacional**

La teoría de la relatividad general de Einstein predice el desvío de la luz alrededor de cuerpos masivos. Por simplicidad, suponemos que el desvío ocurre en un solo punto para cada rayo, como se muestra en la figura. El ángulo de desvío,  $\theta_b$ , está dado por

$$\theta_b = \frac{2 R_{sch}}{r}$$

donde  $R_{sch}$  es el radio de Schwarzschild asociado al cuerpo gravitacional. Llamamos a  $r$ , la distancia medida desde el eje  $x$  (al cuál es paralelo, y a su vez pasa por el centro del cuerpo) al rayo, como el "parámetro de impacto"



Entonces, un cuerpo masivo se comporta de cierta forma como una lente. Los rayos de luz provenientes de una distancia infinita detrás del cuerpo masivo, y con mismo parámetro de impacto  $r$ , convergen a un punto sobre el eje  $x$  a una distancia  $f_i$  del centro del cuerpo masivo. Un observador colocado en este punto se beneficiaría enormemente de la gran amplificación debido al enfoque gravitacional. En este caso, el cuerpo masivo se está usando como un Telescopio de Lente Gravitacional para la amplificación de señales distantes.

(T10.1) Considera la posibilidad de usar nuestro Sol como un telescopio de lente gravitacional. Calcula la menor distancia,  $f_{min}$ , desde el centro del Sol (en unidades astronómicas) a la cual los rayos de luz pueden enfocarse. 6

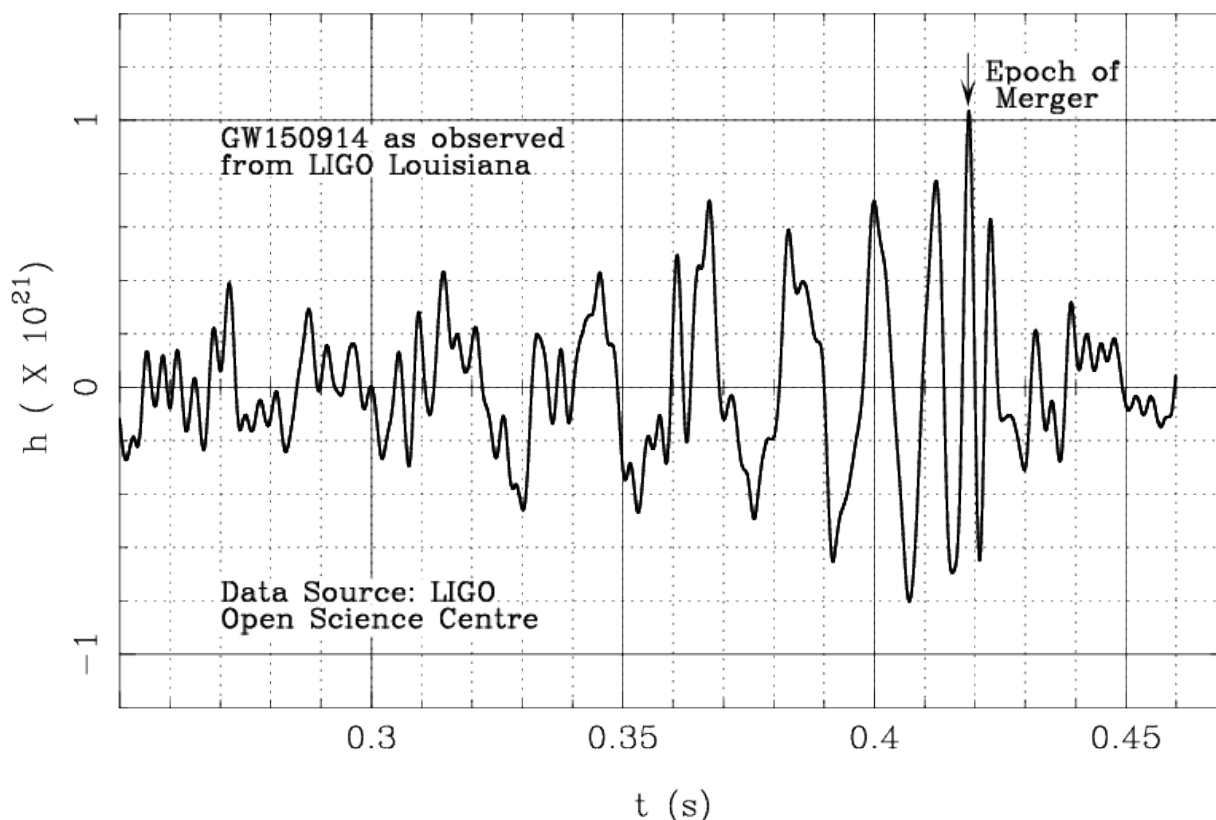
(T10.2) Considera un pequeño detector circular de radio  $a$ , mantenido a distancia  $f_{min}$  centrado en el eje  $x$  y perpendicular a este. Nota que sólo los rayos de luz que pasan dentro de un cierto anillo de espesor  $h$  (donde  $h \ll R_\odot$ ) alrededor del sol podrán alcanzar el detector. El factor de amplificación en el detector es definido como la razón entre la intensidad de la luz recibida en el detector en presencia del Sol y la intensidad en ausencia del Sol. 8

Expresa el factor de amplificación,  $A_m$ , en el detector en términos de  $R_\odot$  y  $a$ .

(T10.3) Considera una distribución esférica de masa, como un cúmulo de materia oscura, a través del cual los rayos de luz pueden pasar mientras son afectados por el desvío gravitacional. Asume por simplicidad que para el desvío gravitacional con parámetro de impacto  $r$ , solo la masa  $M(r)$  contenida dentro de la esfera de radio  $r$  es relevante. ¿Cuál debería ser la distribución de masa  $M(r)$  para que la lente gravitacional se comporte como una lente convexa ideal? 6

### (T11) Ondas Gravitacionales

La primera señal de las ondas gravitacionales fue observada por dos detectores avanzados de LIGO en Hanford y Livingston, EE.UU. en septiembre del 2015. Una de estas medidas (esfuerzo vs tiempo en segundos) se muestra en la figura de abajo. En este problema, vamos a interpretar esta señal en términos de una pequeña masa de prueba  $m$  en órbita alrededor de una masa grande  $M$  (es decir,  $m \ll M$ ), teniendo en cuenta varios modelos de la naturaleza de la masa central.



La masa de prueba pierde energía debido a la emisión de ondas gravitacionales. Como resultado, la órbita sigue disminuyendo, hasta que la masa de prueba llega a la superficie del objeto, o en el caso de un agujero negro, la órbita más interna circular estable - ISCO - que está dada por  $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{sch}}$ , donde  $R_{\text{sch}}$  es el radio de Schwarzschild del agujero negro. Esta es la "época de la fusión." En este punto, la amplitud de la onda gravitacional es máxima, y al igual que su frecuencia, la cual es siempre el doble de la frecuencia orbital. En este problema, sólo nos centraremos en las ondas gravitacionales antes de la fusión, cuando las leyes de Kepler se asumen que aún son válidas. Después de la fusión, la forma de ondas gravitacionales cambiará drásticamente.

(T11.1) Considere las ondas gravitacionales observadas se muestran en la figura anterior. Estime el periodo tiempo,  $T_0$ , y por lo tanto la frecuencia,  $f_0$ , de las ondas gravitacionales justo antes de la época de la fusión. 3

(T11.2) Para cualquier estrella de secuencia principal (MS), el radio de la estrella,  $R_{\text{MS}}$ , y su masa,  $M_{\text{MS}}$ , están relacionados por la ley de potencia: 10

$$R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^\alpha$$

donde  $\alpha = 0.8$  para  $M_\odot < M_{\text{MS}}$   
 $\alpha = 1.0$  para  $0.08M_\odot \leq M_{\text{MS}} \leq M_\odot$

Si el objeto central fuera una estrella de secuencia principal, escriba una expresión para la frecuencia máxima de las ondas gravitacionales,  $f_{\text{MS}}$ , en términos de masa de la estrella en unidades de masas solares ( $M_{\text{MS}} / M_\odot$ ) y  $\alpha$ .

(T11.3) Usando el resultado anterior, determine el valor apropiado de  $\alpha$  que dará la frecuencia máxima posible de las ondas gravitacionales,  $f_{\text{MS}, \text{max}}$  para cualquier estrella de secuencia principal. Evalúe esta frecuencia. 9

(T11.4) Las estrellas enana blanca (WD) tienen una masa máxima de  $1.44 M_\odot$  (conocidos como el límite de Chandrasekhar) y obedecen a la relación masa-radio  $R \propto M^{-1/3}$ . El radio de la enana blanca de una masa solar es igual a 6000 kilómetros. Encontrar la frecuencia más alta de las ondas gravitacionales emitidas,  $f_{\text{WD}, \text{max}}$ , si la masa de prueba está orbitando alrededor de la enana blanca. 8

(T11.5) Las estrellas de neutrones (NS) son un tipo peculiar de objetos compactos que tienen masas de entre 1 y 3  $M_{\odot}$  y radios en el rango de 10 - 15 km. Encontrar el rango de frecuencias de las ondas gravitacionales emitidas,  $f_{NS, \min}$  y  $f_{NS, \max}$ , si la masa de prueba está orbitando a una estrella de neutrones a una distancia cerca de la radio de la estrella de neutrones.

(T11.6) Si la masa de prueba está orbitando alrededor del agujero negro (BH), escriba la expresión para la frecuencia de las ondas gravitacionales emitidas,  $f_{BH}$ , en términos de la masa del agujero negro,  $M_{BH}$ , y la masa solar  $M_{\odot}$ . 7

(T11.7) Basado sólo en el periodo tiempo (o frecuencia) de las ondas gravitacionales antes de la época de la fusión, determinar si el objeto central puede ser una estrella de secuencia principal (MS), enana blanca (WD), estrella de neutrones (NS), o la agujero negro (BH). Marque la opción correcta en el [Summary Answersheet] hoja de respuestas. Estimar la masa de este objeto,  $M_{obj}$ , en unidades de  $M_{\odot}$ . 5

**(T12) Exoplanetas**

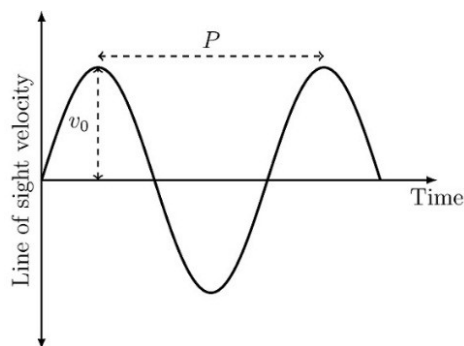
Los dos métodos principales de detección de exoplanetas (planetas alrededor de estrellas distintas del Sol) son el método de velocidad radial (o lo que se denomina “oscilación” [*wobble*]) y el método de tránsito. En este problema, descubrimos cómo una combinación de los resultados de estos dos métodos puede revelar mucha información sobre un exoplaneta en órbita y su estrella anfitriona.

A lo largo de este problema, consideramos el caso de un planeta de masa  $M_p$  y radio  $R_p$  moviéndose en una órbita circular de radio  $a$  alrededor de una estrella de masa  $M_s$  ( $M_s \gg M_p$ ) y radio  $R_s$ . La normalidad al plano orbital del planeta está inclinada en ángulo  $i$  con respecto a la línea de visión ( $i = 90^\circ$ ) significando “en la orilla” la órbita. Asumimos que no hay otro planeta orbitando la estrella y  $R_s \ll a$ .

**Método de “oscilaciones”:**

Cuando un planeta y una estrella orbitan entre sí alrededor de su baricentro, la estrella aparenta un movimiento lento, u “oscilación”, dado que el centro de masas no coincide con el baricentro del sistema estrella-planeta. Como resultado, la luz recibida de la estrella pasa por un pequeño corrimiento Doppler relacionado con la velocidad de la oscilación.

La velocidad en la línea de visión,  $v_r$ , de la estrella puede ser determinada por medio del corrimiento Doppler de una línea espectral conocida. Su periodo de variación en el tiempo,  $t$ , se muestra en el diagrama de abajo. En el diagrama, las dos cantidades medibles este método, el periodo orbital  $P$  y la máxima velocidad en la línea de visión  $v_0$ , son mostradas



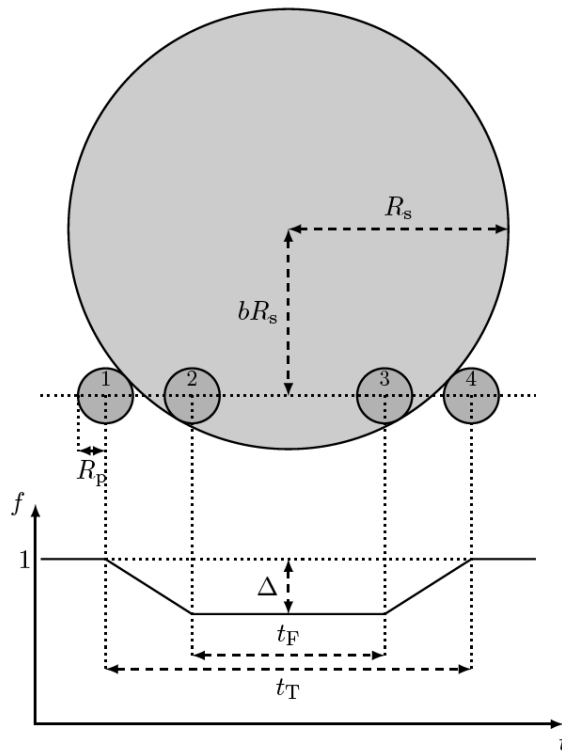
(T12.1) Calcule el radio orbital ( $a$ ) y la velocidad orbital ( $v_p$ ) del planeta en términos de  $M_s$  y  $P$ . 3

(T12.2) Obtenga el límite inferior de la masa del planeta,  $M_{p, \min}$ , en términos de  $M_s$ ,  $v_0$  y  $v_p$ . 4

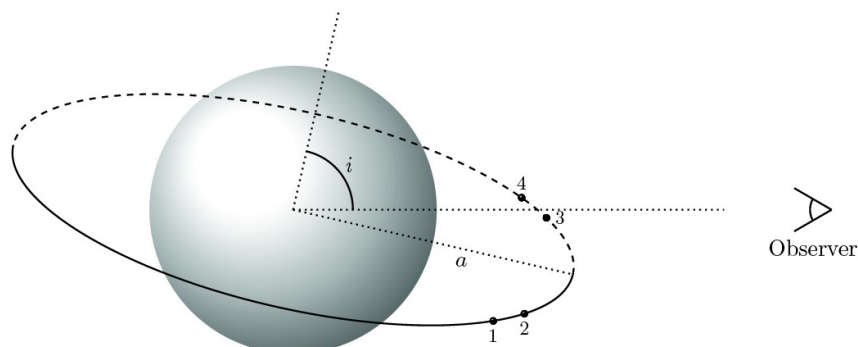
**Método de Tránsito:**

A medida que un planeta orbita su estrella anfitriona, para orientaciones del plano orbital que están cerca de "borde" ( $i \approx 90^\circ$ ), pasará periódicamente, o "tránsito", delante del disco estelar visto por el observador. Esto causará un pequeño decrecimiento en el flujo estelar, el cual puede ser medido. El diagrama esquemático siguiente (NO dibujado a escala) muestra la situación desde la perspectiva del observador y la curva de luz de tránsito resultante (flujo normalizado,  $f$ , vs tiempo,  $t$ ) para un disco estelar uniformemente brillante.

Si el ángulo de inclinación  $i$  es exactamente  $90^\circ$ , se vería que el planeta cruza el disco estelar a lo largo de un diámetro. Para otros valores de  $i$ , el tránsito se produce a lo largo de un acorde, cuyo centro se encuentra a una distancia  $bR_s$  del centro del disco estelar, como se muestra. El flujo sin tránsito se normaliza a 1 y la inmersión [dip] máxima durante el tránsito viene dada por  $\Delta$ .



Los cuatro puntos significativos en el tránsito son el primer, segundo, tercero y cuarto contactos, marcados por las posiciones 1 a 4, respectivamente, en la figura anterior. El intervalo de tiempo durante el segundo y tercer contacto se denomina  $T_F$ , cuando el disco del planeta se superpone completamente al disco estelar. El intervalo de tiempo entre el primer y el cuarto contactos se indica con  $t_T$ . Estos puntos también están marcados en el diagrama esquemático que se muestra a continuación, mostrando una vista lateral de la órbita (NO dibujada a escala).



Las cantidades medibles en el método de tránsito son  $P$ ,  $t_T$ ,  $t_F$  y  $\Delta$ .

- (T12.3) Encuentra la restricción en  $i$  en términos de  $R_S$  y  $a$  para que el tránsito sea completamente visible para un observador distante. 2
- (T12.4) Expresa  $\Delta$  en términos de  $R_S$  y  $R_P$ . 1
- (T12.5) Expresa  $t_T$  y  $t_F$  en términos de  $R_S$ ,  $R_P$ ,  $a$ ,  $P$  y  $b$ . 8
- (T12.6) En la aproximación de una órbita mucho mayor al radio estelar, mostrar que el parámetro  $b$  está dado por 5

$$b = \left[ 1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_T}{t_F}\right)^2} \right]^{1/2}$$

- (T12.7) Usa el resultado de la parte (T12.6) para obtener una expresión para la razón  $a/R_S$  en términos de parámetros de tránsito medibles, usando una aproximación adecuada. 3
- (T12.8) Combina los resultados del método de oscilación y el método de tránsito para determinar la densidad estelar media  $\rho \equiv \frac{M_S}{4\pi R_S^3/3}$  en términos de  $t_T$ ,  $t_F$ ,  $\Delta$  y  $P$ . 6

**Rocoso o gaseoso:**

Consideremos un sistema estrella-planeta (donde la órbita del planeta es circular) vista de canto ( $i=90^\circ$ ) desde la Tierra. Se sabe que la masa de la estrella anfitriona es  $1.00 M_\odot$ . Los tránsitos son observados con un periodo ( $P$ ) de 50.0 días y una duración total de tránsito ( $t_T$ ) de 1.00 horas. La profundidad de tránsito ( $\Delta$ ) es 0.0064. El mismo sistema fue observado con el método de oscilación, y se observó con una velocidad en la línea de visión máxima de  $0.400 \text{ m s}^{-1}$ .

- (T12.9) Encontrar el periodo orbital  $a$  del planeta en unidades astronómicas (AU) y en metros. 2
- (T12.10) Encontrar la razón  $t_F/t_T$  del sistema. 2
- (T12.11) Obtener la masa  $M_P$  y el radio  $R_P$  del planeta en términos de la masa ( $M_\oplus$ ) y el radio ( $R_\oplus$ ) de la Tierra. ¿La composición del planeta, es rocosa o gaseosa? Palomea la opción Rocosa (ROCKY) o Gaseosa (ROCKU) en la hoja de respuestas. 8

**Curvas de luz de tránsito realistas:**

- (T12.12) Considera un tránsito planetario con  $i=90^\circ$  alrededor de una estrella que tiene una mancha solar (starspot) en su ecuador, comparable al tamaño del planeta,  $R_P$ . El periodo de rotación del planeta es  $2P$ . Dibuja un diagrama de la curva de luz de tránsito para cinco tránsitos consecutivos del planeta. El flujo de no-tránsito de cada tránsito deberá ser normalizado a la unidad. Suponga que el planeta no se encuentra con la mancha solar durante el primer tránsito pero que sí lo hace en el segundo. 4
- (T12.13) Se ha considerado a lo largo del problema un disco estelar de brillo uniforme. Si embargo, los discos estelares reales tienen oscurecimiento de bordes. Dibuja el diagrama de una curva de tránsito de luz cuando el oscurecimiento de bordes está presente en la estrella anfitriona. 2