

**(T1) Verdadeiro ou Falso**

Determina se cada uma das seguintes afirmações é Verdadeira ou Falsa. Na Folha de Respostas, faz um visto na resposta correcta (TRUE/FALSE) para cada afirmação. Não são necessárias justificações para esta questão.

- (T1.1)** Numa fotografia do céu numa noite de Lua Cheia sem nuvens com exposição suficientemente longa, a cor do céu irá aparecer azul, tal como durante o dia.

2
- (T1.2)** Um astrónomo em Bhubaneswar marca a posição do Sol no céu às 05:00 UT durante todos os dias do ano. Se o eixo da Terra fosse perpendicular ao seu plano orbital, estas posições traçariam um arco de círculo máximo.

2
- (T1.3)** Se período orbital de um certo corpo menor em órbita em torno do Sol no plano da eclíptica é menor do que o período orbital de Urano, então, necessariamente, a sua órbita deve ser totalmente interior à órbita de Urano.

2
- (T1.4)** O centro de massa do sistema solar está sempre dentro do Sol.

2
- (T1.5)** Um fotão está a mover-se livremente no espaço. À medida que o Universo se expande, o seu momento diminui.

2

**(T2) Gases em Titã**

As partículas de gás numa atmosfera planetária têm uma larga distribuição de velocidades. Se a velocidade térmica r.m.s. (root mean square) das partículas de um determinado gás exceder 1/6 da velocidade de escape, então a maior parte do gás irá escapar do planeta. Qual é o peso atómico mínimo (massa atómica relativa),  $A_{\min}$ , de um gás ideal monoatómico para que ele permaneça na atmosfera de Titã?

Dados: massa de Titã  $M_T = 1.23 \times 10^{23} \text{ kg}$ , raio of Titã  $R_T = 2575 \text{ km}$ , temperatura à superfície de Titã  $T_T = 93.7 \text{ K}$ .

**(T3) Universo primordial**

Modelos cosmológicos indicam que a densidade de energia de radiação,  $\rho_r$ , no Universo é proporcional a  $(1+z)^4$ , e a densidade de energia de matéria,  $\rho_m$ , é proporcional a  $(1+z)^3$ , onde  $z$  é o redshift. O parâmetro de densidade adimensional,  $\Omega$ , é dado como  $\Omega = \rho/\rho_c$ , onde  $\rho_c$  é a densidade de energia crítica do Universo. No Universo actual, os parâmetros de densidade correspondentes à radiação e matéria são  $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$  e  $\Omega_{m_0} = 0.3$ , respectivamente.

- (T3.1)** Calcula o redshift,  $z_e$ , em que as densidades de energia de radiação e de matéria são iguais.

3
- (T3.2)** Assumindo que a radiação do Universo primordial tem um espectro de corpo negro com uma temperatura de  $2.732 \text{ K}$ , estima a temperatura,  $T_e$ , da radiação no redshift  $z_e$ .

4
- (T3.3)** Estima a energia típica de um fotão,  $E_\nu$  (em  $eV$ ), da radiação emitida no redshift  $z_e$ .

3

**(T4) Sombras**

Um observador no hemisfério norte verificou que o comprimento da sombra mais curta de uma pequena vara vertical de  $1.000 \text{ m}$  era  $1.732 \text{ m}$  num determinado dia. No mesmo dia, o comprimento da sombra mais comprida da mesma vara foi medido como  $5.671 \text{ m}$ .

Determina a latitude,  $\phi$ , do observador e a declinação do Sol,  $\delta_\odot$ , no mesmo dia. Assume que o Sol é uma fonte pontual e ignora a refração atmosférica.

**(T5) Trânsito no feixe do GMRT**

O *Giant Metrewave Radio Telescope* (GMRT), um dos maiores radiotelescópios do mundo nos comprimentos de onda da ordem do metro, está localizado no Oeste da Índia (latitude:  $19^\circ 6' N$ , longitude:  $74^\circ 3' E$ ). O GMRT é composto por 30 antenas, cada uma com um diâmetro de

10

10

10

45.0 m . Uma das antenas foi fixada com o seu eixo a apontar para um ângulo zenital de  $39^{\circ} 42'$  ao longo da parte norte do meridiano, de forma que uma fonte radio pontual irá passar ao longo do diâmetro do feixe, quando transitar o meridiano.

Qual é a duração  $T_{transit}$  durante a qual a fonte estará dentro do FWHM (*full width at half maximum*) do feixe da antena do GMRT, observando a  $200\text{ MHz}$  ?

**Dica:** O tamanho do FWHM do feixe de uma antena rádio a operar numa dada frequência corresponde à resolução angular da antena. Assume iluminação uniforme.

**(T6) Pulsações de Cefeidas**

A estrela  $\beta$ -Doradus é uma estrela variável do tipo Cefeida com período de pulsação de 9.84 dias. Assumimos que a estrela é mais brilhante quando está mais contraída (raio  $R_1$ ) e é menos brilhante quando está mais expandida (raio  $R_2$ ). Para simplificar, assume que a estrela mantém a sua forma esférica e comporta-se como um corpo negro perfeito em qualquer instante durante o seu ciclo. A magnitude bolométrica da estrela varia de 3.46 até 4.08. A partir de medições do efeito Doppler, sabemos que durante a pulsação, a superfície da estrela expande ou contrai a uma velocidade radial média de  $12.8\text{ km s}^{-1}$ . Ao longo do período de pulsação, o pico da radiação térmica (intrínseca) da estrela varia entre 531.0 nm e 649.1 nm.

(T6.1) Determina a razão entre os raios da estrela totalmente contraída e expandida ( $R_1/R_2$ ). 7

(T6.2) Calcula os raios da estrela (em metros) totalmente contraída e expandida ( $R_1$  e  $R_2$ ). 3

(T6.3) Calcula o fluxo da estrela,  $F_2$ , quando ela está no estado de maior expansão. 5

(T6.4) Calcula a distância à estrela,  $D_{star}$ , em parsec. 5

**(T7) Óptica do Telescópio**

Num determinado telescópio refractor ideal de razão focal  $f/5$ , a distância focal da lente objectiva é 100 cm e da ocular é 1 cm.

(T7.1) Qual é a magnificação angular,  $m_0$ , do telescópio? Qual é o comprimento do telescópio,  $L_0$ , isto é, a distância entre a objectiva e a ocular? 4

A introdução de uma lente concava (lente Barlow) entre a lente objectiva e o foco primário é uma forma comum de aumentar a magnificação sem aumentar muito o comprimento do telescópio. Uma lente Barlow de distância focal 1 cm é agora introduzida entre a objectiva e a ocular para duplicar a magnificação.

(T7.2) A que distância,  $d_B$ , do foco primário deve ser colocada a lente Barlow para obter esta dupla magnificação? 6

(T7.3) Qual o incremento,  $\Delta L$ , no comprimento do telescópio? 4

Um telescópio é construído com a mesma lente objectiva e um CCD é colocado no foco primário (sem qualquer lente Barlow ou ocular). O tamanho de cada pixel do detector é  $10\ \mu\text{m}$ .

(T7.4) Qual será a separação em pixels,  $n_p$ , no CCD, entre o centroide das imagens de duas estrelas que estão separadas por  $20''$  no céu? 6

**(T8) Fotometria na banda U**

Uma estrela tem uma magnitude aparente de  $m_U = 15.0$  na banda U. O filtro da banda U é ideal, isto é, tem uma transmissão perfeita (100%) dentro da banda e é completamente opaco (0% de transmissão) fora dela. O filtro está centrado em  $360\text{ nm}$ , e tem uma largura de  $80\text{ nm}$ . Assume-se também que a estrela tem um espectro de energia horizontal com respeito à frequência. A conversão entre magnitude,  $m$ , em qualquer banda e a densidade de fluxo,  $f$ , de uma estrela em Jansky

(  $1\text{ Jy} = 1 \times 10^{-26}\text{ W Hz}^{-1}\text{ m}^{-2}$  ) é dada por

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m}\text{ Jy}$$

(T8.1) Aproximadamente quantos fotões,  $N_0$ , da banda U provenientes desta estrela irão incidir perpendicularmente numa área de  $1\text{ m}^2$  no topo da atmosfera terrestre em cada segundo? 8

Esta estrela está a ser observada na banda U usando um telescópio na superfície da Terra, cujo espelho primário tem um diâmetro de  $2.0\text{ m}$ . A extinção atmosférica na banda U durante a observação é de 50%. Podes assumir que o seeing é menor do que a difracção. O brilho médio de superfície do céu nocturno na banda U é de  $22.0\text{ mag/arcsec}^2$ .

(T8.2) Qual é a razão,  $R$ , entre o número de fotões por segundo provenientes da estrela e os provenientes do céu, quando medidos numa abertura circular de  $2''$  de diâmetro? 8

(T8.3) Na prática, apenas 20% dos fotões da banda U que chegam ao espelho primário são detectados. Quantos fotões,  $N_t$ , provenientes da estrela são detectados por segundo? 4

**(T9) Missão Mars Orbiter**

A missão indiana *Mars Orbiter Mission (MOM)* foi lançada usando o lançador *Polar Satellite Launch Vehicle (PSLV)* no dia 5 de Novembro de 2013. A massa seca (corpo+instrumentos) era  $500\text{ kg}$  e ela carregava  $852\text{ kg}$  de combustível. Foi inicialmente colocada numa órbita elíptica em torno da Terra com perigeu a uma altura de  $264.1\text{ km}$  e um apogeu a uma altura de  $23903.6\text{ km}$ , acima da superfície da Terra. Depois de alargar a órbita 6 vezes, a MOM foi transferida para uma órbita de injeção trans-marciana (órbita de Hohmann).

A primeira das manobras de alargamento de órbita foi realizada accionando os motores próximo do perigeu durante um curtíssimo intervalo de tempo. Os motores foram accionados para alterar a órbita sem alterar o plano da órbita e sem alterar a posição do perigeu. Isto resultou num impulso de  $1.73 \times 10^5\text{ kg m s}^{-1}$  aplicado ao satélite. Ignora a alteração de massa devido ao consumo de combustível.

(T9.1) Qual é a altura do novo apogeu,  $h_a$ , acima da superfície da Terra, depois do motor ter actuado? 14

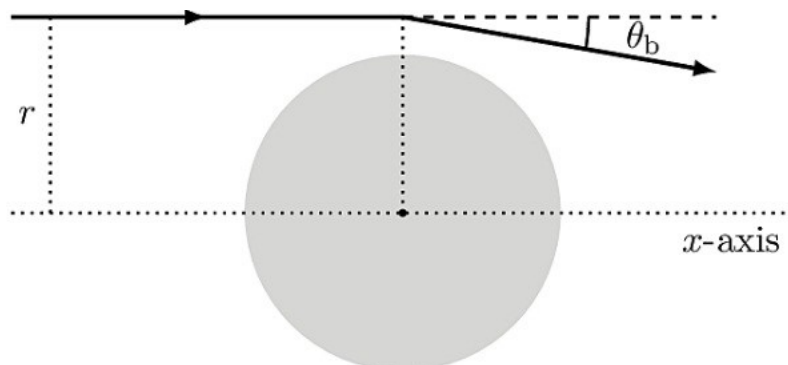
(T9.2) Calcula a excentricidade ( $e$ ) da nova órbita após o impulso e o novo período orbital (P) da MOM em horas. 6

**(T10) Telescópio de Lentes Gravitacionais**

A Teoria da Relatividade de Einstein prediz que a luz curva em torno de corpos massivos. Para simplificar, assumimos que esta alteração da trajectória acontece num único ponto para cada raio de luz, como indicado na figura. O ângulo de curvatura,  $\theta_b$ , é dado por

$$\theta_b = \frac{2R_{sch}}{r}$$

onde  $R_{sch}$  é o raio de Schwarzschild associado com aquele corpo gravítico. Designamos  $r$ , a distância do raio de luz incidente ao eixo-x paralelo que passa pelo centro do corpo, como o “factor de impacto.”



Um corpo massivo comporta-se, portanto, como uma lente focalizadora. Os raios de luz provenientes do infinito, e como o mesmo factor de impacto  $r$ , convergem num ponto ao longo do eixo, a uma distância  $f_r$  do centro do corpo massivo. Um observador nesse ponto irá beneficiar de uma grande ampliação devido a esta focagem gravitacional. O corpo massivo neste caso está a ser utilizado como um Telescópio de Lente Gravitacional para amplificar sinais distantes.

(T10.1) Considera a possibilidade de o nosso Sol ser um telescópio de lente gravitacional. Calcula a distância mais curta,  $f_{min}$ , do centro do Sol (em U.A.) a que os raios podem ser focados. 6

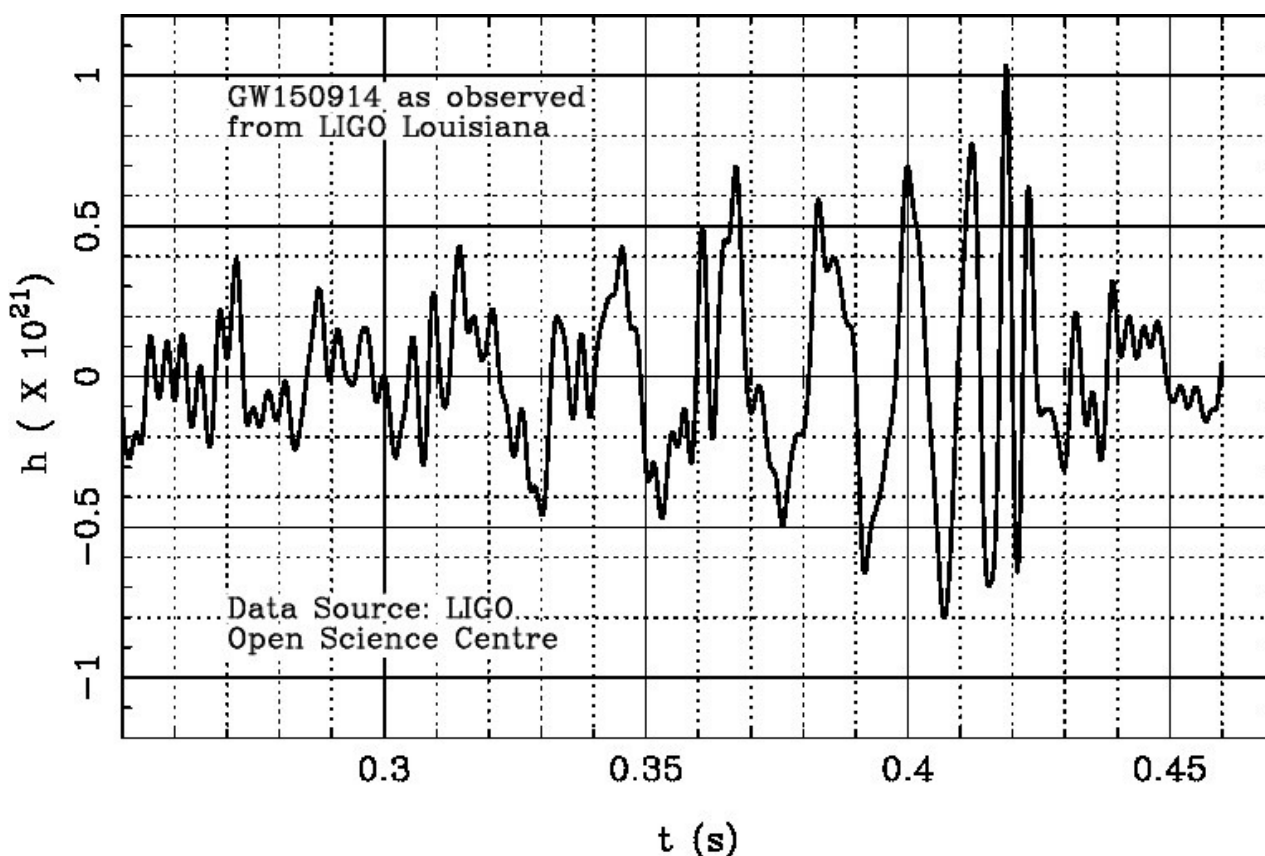
(T10.2) Considera um pequeno detector circular de raio  $a$ , mantido a uma distância  $f_{min}$ , centrado no eixo-x e perpendicular a este. Nota que apenas os raios de luz que passam dentro de um certo anel de espessura  $h$  (onde  $h \ll R_{\odot}$ ) em torno do sol irão encontrar este detector. O factor de ampliação no detector é definido como a razão entre a intensidade da luz incidente no detector na presença do Sol e a intensidade na ausência do Sol. 8

Expressa o factor de ampliação,  $A_m$ , no detector em termos de  $R_{\odot}$  e  $a$ .

(T10.3) Considera uma distribuição esférica de massa, tal como a matéria escura num enxame de galáxias, ao longo da qual os raios de luz possam passar enquanto sofrem a curvatura gravitacional. Assume para simplicidade que, para o um efeito de lente gravitacional com factor de impacto,  $r$ , apenas a massa  $M(r)$  englobada por um raio  $r$  é relevante. Qual deve ser a distribuição de massa,  $M(r)$ , de forma que o efeito de lente gravitacional se comporte como uma lente óptica convexa ideal? 6

**(T11) Ondas Gravitacionais**

O primeiro sinal de ondas gravitacionais foi observado por dois detectores LIGO em Hanford e Livingston, EUA em Setembro de 2015. Uma dessas medições (amplitude vs. tempo em segundos) é apresentada na figura seguinte. Neste problema, iremos interpretar este sinal em termos de uma pequena massa de teste  $m$  orbitando uma massa maior  $M$  (i.e.,  $m \ll M$ ), considerando vários modelos para a natureza da massa central.



A massa de teste perde energia devido à emissão de ondas gravitacionais. Como resultado, a órbita continua a diminuir até que a massa de teste atinge a superfície do objecto, ou no caso de um buraco negro, a menor órbita estável circular (*Inner Stable Circular Orbit*) – *ISCO* – a qual é dada por  $R_{ISCO} = 3 R_{sch}$ , onde  $R_{sch}$  é o raio de Schwarzschild do buraco negro. Esta é a “época da fusão”. Neste momento, a amplitude da onda gravitacional é máxima, bem como a sua frequência, que é sempre o dobro da frequência orbital. Neste problema, iremos apenas focar-nos nas ondas gravitacionais antes da fusão, quando as leis de Kepler são assumidamente válidas. Depois da fusão, a forma das ondas gravitacionais irá alterar-se drasticamente.

- (T11.1) Considera as ondas gravitacionais representadas na figura acima. Estima o período  $T_0$ , e, por conseguinte, calcula a frequência,  $f_0$ , das ondas gravitacionais imediatamente antes de começar a época da fusão. 3
- (T11.2) Para qualquer estrela da sequência principal (MS), o raio da estrela,  $R_{MS}$ , e a sua massa,  $M_{MS}$ , são relacionadas por uma lei de potência,  

$$R_{MS} \propto (M_{MS})^\alpha$$
 onde  $\alpha = 0.8$  para  $M_\odot < M_{MS}$   
 $\alpha = 1.0$  para  $0.08 M_\odot \leq M_{MS} \leq M_\odot$  10
- Se o objecto central fosse uma estrela da sequência principal, escreve uma expressão para a frequência máxima das ondas gravitacionais,  $f_{MS}$ , em termos da massa da estrela em unidades de massas solares ( $M_{MS}/M_\odot$ ) e  $\alpha$ .
- (T11.3) Usando o resultado acima, determina o valor apropriado de  $\alpha$  que irá resultar na máxima frequência possível para as ondas gravitacionais,  $f_{MS,max}$ , para qualquer estrela da sequência principal. Avalia esta frequência. 9
- (T11.4) As anãs brancas (WD) têm uma massa máxima de  $1.44 M_\odot$  (conhecida como o limite de Chandrasekhar) e obedecem à relação massa-raio  $R \propto M^{-1/3}$ . O raio de uma anã branca de uma massa solar é igual a  $6000 \text{ km}$ . Calcula a frequência de ondas gravitacionais mais alta possível,  $f_{WD,max}$ , se a massa de teste orbita uma anã branca. 8
- (T11.5) As estrelas de neutrões (NS) são um caso peculiar de objectos compactos que têm massas entre 1 e  $3 M_\odot$  e raios na gama  $10 - 15 \text{ km}$ . Calcula a gama de frequências das ondas gravitacionais emitidas,  $f_{NS,min}$  e  $f_{NS,max}$ , se a massa de teste está a orbitar uma estrela de neutrões a uma distância próxima do raio da estrela de neutrões. 8
- (T11.6) Se a massa de teste está a orbitar um buraco negro (BH), escreve a expressão para a frequência das ondas gravitacionais emitidas,  $f_{BH}$ , em termos da massa do buraco negro,  $M_{BH}$ , e massa do Sol  $M_\odot$ . 7
- (T11.7) Baseado apenas no período (ou frequência) das ondas gravitacionais antes da época da fusão, determina se o objecto central pode ser uma estrela da sequência principal (MS), uma anã branca (WD), uma estrela de neutrões (NS) ou um buraco negro (BH). Faz um visto na resposta correcta na Folha de Respostas. Estima a massa do objecto,  $M_{obj}$ , em unidades de  $M_\odot$ . 5

## (T12) Exoplanetas

Os dois métodos principais de detecção de exoplanetas (planetas em torno de estrelas que não o Sol) são o método da velocidade radial (conhecido também como “oscilação”) e o método do trânsito. Neste problema, vamos verificar como uma combinação de resultados destes dois métodos pode revelar muita informação sobre um exoplaneta e a sua estrela.

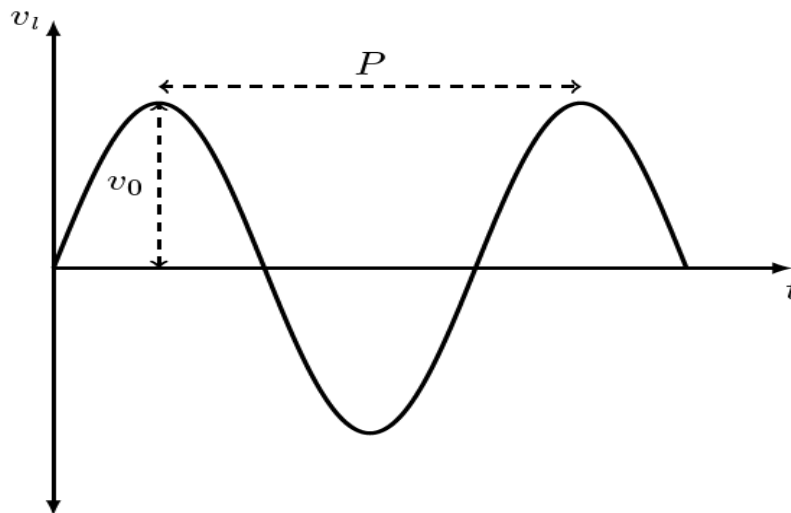
Ao longo deste problema, consideramos o caso de um planeta com massa  $M_p$  e raio  $R_p$  movendo-se numa órbita circular de raio  $a$  em torno de uma estrela de massa  $M_s$  ( $M_s \gg M_p$ ) e raio  $R_s$ . A direcção perpendicular ao plano orbital do planeta está inclinada por um ângulo  $i$  com respeito à

linha de visão (  $i=90^\circ$  significaria órbita vista de perfil). Assumimos que não há outro planeta a orbitar em torno da estrela e que  $R_s \ll a$  .

**Método da “Oscilação” :**

Quando um planeta e a estrela orbitam-se mutuamente em torno do seu baricentro, a estrela é vista a mover-se ligeiramente, ou a “oscilar”, uma vez que o centro de massa da estrela não coincide com o baricentro de um sistema estrela-planeta. Como resultado, a luz recebida da estrela sofre um pequeno desvio Doppler relacionado com a velocidade desta oscilação.

A velocidade da estrela na linha de visão,  $v_l$  , pode ser determinada a partir do desvio de Doppler de uma risca espectral conhecida, e a sua variação periódica com o tempo,  $t$ , é apresentada no diagrama esquemático que se segue. No diagrama, as duas quantidades mensuráveis neste método, nomeadamente, o período orbital  $P$  e a velocidade máxima na linha de visão  $v_0$  são apresentadas.



(T12.1) Deriva as expressões para o raio orbital ( $a$ ) e a velocidade orbital ( $v_p$ ) do planeta em termos de  $M_s$  e  $P$  . 3

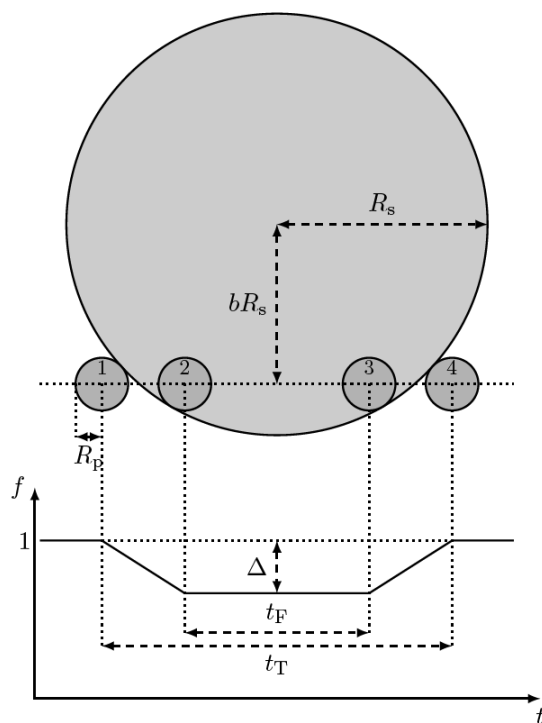
(T12.2) Obtem um limite inferior para a massa do planeta,  $M_{p,min}$  , em termos de  $M_s$  ,  $v_0$  e  $v_p$  . 4

**Método do Trânsito:**

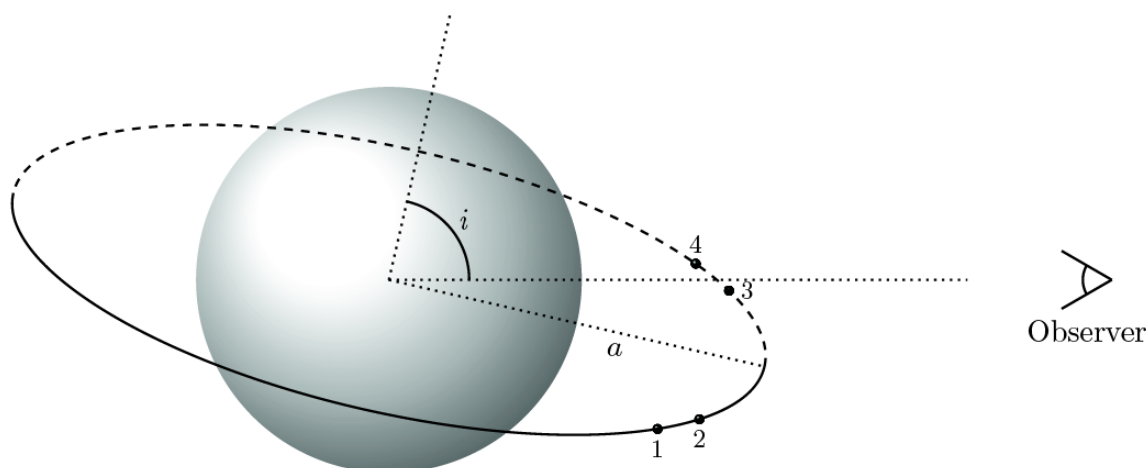
À medida que um planeta orbita a sua estrela, para orientações que estão próximas da orientação de perfil  $i \approx 90^\circ$  , ele irá passar periodicamente, ou “transitar”, em frente do disco estelar, tal como é visto pelo observador. Isto irá provocar um pequeno decréscimo no fluxo estelar observado, o qual pode ser medido. O esquema seguinte (não representado à escala), mostra a situação da perspectiva do observador e a curva de luz resultante do trânsito (fluxo normalizado,  $f$ , vs tempo,  $t$ ) para um disco estelar uniformemente brilhante.

Se a inclinação  $i$  é exactamente  $90^\circ$  , o planeta pode ser visto a atravessar o disco estelar ao longo do seu diâmetro. Para outros valores de  $i$  , o trânsito ocorre ao longo de uma corda, cujo centro está a uma distância  $bR_s$  do centro do disco estelar, como é mostrado. O fluxo fora do trânsito está normalizado a 1 e a depressão máxima durante o trânsito é dada por  $\Delta$  .





Os quatro pontos significativos no trânsito são os contactos primeiro, segundo, terceiro e quarto, marcados pelas posições 1 a 4, respectivamente, na figura acima. O intervalo de tempo entre os segundo e terceiro contactos é designado por  $t_F$ , quando o disco do planeta está totalmente sobreposto sobre o disco da estrela. O intervalo de tempo entre os primeiro e quarto contactos é designado por  $t_T$ . Estes pontos estão também marcados no esquema que se segue, mostrando uma perspectiva “side-on” da órbita. (NÃO está desenhado à escala).



As quantidades mensuráveis no método do trânsito são  $P$ ,  $t_T$ ,  $t_F$  e  $\Delta$ .

(T12.3) Determina a limitação de  $i$  em função de  $R_s$  e  $a$  para que o trânsito seja visível para um observador distante. 2

(T12.4) Expressa  $\Delta$  em termos de  $R_s$  e  $R_p$ . 1

(T12.5) Expressa  $t_T$  e  $t_F$  em termos de  $R_s$ ,  $R_p$ ,  $a$ ,  $P$  e  $b$ . 8

(T12.6) Usando a aproximação de uma órbita muito maior do que o raio estelar, mostra que o parâmetro  $b$  é dado por 5

$$b = \left[ 1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

(T12.7) Usa o resultado da parte (T12.6) para obter uma expressão para a razão  $a/R_s$  em função de parâmetros mensuráveis do trânsito, usando uma aproximação apropriada. 3

(T12.8) Combina os resultados do método da velocidade radial e o método do trânsito para determinar a densidade média da estrela  $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$  em função de  $t_T$ ,  $t_F$ ,  $\Delta$  e  $P$ . 6

**Rochoso ou Gasoso:**

Vamos considerar um sistema estrela-planeta de perfil ( $i=90^\circ$ ) (órbita circular para o planeta), tal como visto a partir da Terra. Sabe-se que a estrela tem uma massa  $1.00 M_\odot$ . Os trânsitos são observados com um período ( $P$ ) de 50.0 dias e uma duração total do trânsito ( $t_T$ ) de 1.00 hora. A depressão do trânsito ( $\Delta$ ) é 0.0064. O mesmo sistema é também observado pelo método da “oscilação”, tendo uma velocidade máxima na linha de visão de  $0.400 \text{ ms}^{-1}$ .

(T12.9) Determina o raio orbital  $a$  de um planeta em U.A. e em metros. 2

(T12.10) Determina a razão  $t_F/t_T$  do sistema. 2

(T12.11) Obtem a massa  $M_p$  e o raio  $R_p$  do planeta em função da massa ( $M_\oplus$ ) e do raio ( $R_\oplus$ ) da Terra, respectivamente. Será a composição do planeta provavelmente rochosa ou gasosa? Faz um visto na caixa para “ROCKY” (rochoso) ou “GASEOUS” (gasoso) na Folha de Respostas. 8

**Curvas de luz do trânsito com manchas estelares e escurecimento do limbo:**

(T12.12) Considera um trânsito planetário com  $i=90^\circ$  em torno de uma estrela que tem uma mancha estelar no seu equador, comparável ao tamanho do planeta,  $R_p$ . O período de rotação da estrela é  $2P$ . Desenha diagramas esquemáticos da curva de luz do trânsito para 5 trânsitos sucessivos do planeta (nos templates providenciados na folha de Respostas). O fluxo fora do trânsito pode ser normalizado para a unidade de forma independente para cada diagrama. Assume que o planeta não encontra a mancha estelar no primeiro trânsito mas encontra no segundo. 4

(T12.13) Ao longo do problema, considerámos um disco estelar uniformemente brilhante. No entanto, os discos estelares reais têm escurecimento do limbo. Desenha uma curva de luz esquemática de um trânsito em que há escurecimento do limbo na estrela. 2