

**(T1) Tačno ili netačno**

Utvrđi da li su sledeća tvrđenja tačna ili netačna. Na listu za odgovore, štikliraj svoj odgovor TAČNO / NETAČNO (TRUE / FALSE) za svako tvrđenje. Obrazloženja nisu potrebna.

- (T1.1) Na fotografiji vedrog neba u noći punog meseca sa dovoljno dugom ekspozicijom boja neba će biti plava kao po danu. 2
- (T1.2) Astronom u Bubanešvaru označava poziciju Sunca u 05:00 UT svakog dana u godini. Ako bi Zemljina osa bila ortogonalna na njenu orbitalnu ravan, ove pozicije bi ležale na velikom krugu. 2
- (T1.3) Ako je orbitalni period nekog malog tela koje kruži oko Sunca u ekliptičkoj ravni manji od orbitalnog perioda Urana, njegova orbita mora u celini ležati unutar orbite Urana. 2
- (T1.4) Centar mase Sunčevog sistema je stalno unutar Sunca. 2
- (T1.5) Foton se kreće u praznom prostoru. Kako se univerzum širi, impuls fotona opada. 2

**(T2) Gasovi na Titanu**

Čestice gasa u planetarnoj atmosferi imaju široku raspodelu brzine. Ako je srednja kvadratna termalna brzina čestica određenog gasa veća od  $1/6$  2. kosmičke brzine, veći deo gasa će pobeći sa planete. Koji je minimalni atomski broj,  $A_{\min}$ , idealnog monoatomske gasa koji će ostati u atmosferi Titana?

Dato: masa Titana  $M_T = 1,23 \times 10^{23}$  kg, poluprečnik Titana  $R_T = 2575$  km, površinska temperatura Titana  $T_T = 93,7$  K.

**(T3) Rani univerzum**

Kosmološki modeli ukazuju da je gustina energije zračenja,  $\rho_r$ , u univerzumu proporcionalna  $(1+z)^4$ , a gustina energije materije,  $\rho_m$ , proporcionalna  $(1+z)^3$ , gde je  $z$  crveni pomak. Bezdimenzioni parametar gustine,  $\Omega$ , dat je izrazom  $\Omega = \rho/\rho_c$ , gde je  $\rho_c$  kritična gustina energije univerzuma. U sadašnjem univerzumu, parametri gustine koji odgovaraju gustini energije zračenja i materije su  $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$  i  $\Omega_{m_0} = 0,3$ , respektivno.

- (T3.1) Izračunajte crveni pomak,  $z_e$ , na kojem su gustine energije zračenja i materije bile jednake. 3
- (T3.2) Pretpostavljajući da zračenje ranog univerzuma ima spektar apsolutno crnog tela temperature 2,732 K, proceniti temperaturu,  $T_e$ , zračenja na crvenom pomaku  $z_e$ . 4
- (T3.3) Proceni najverovatniju energiju fotona,  $E_\nu$  (in eV), zračenja na crvenom pomaku  $z_e$ . 3

**(T4) Senke**

Posmatrač na severnoj hemisferi je primetio da je dužina najkraće senke vertikalnog štapa, dužine 1,000 m, tog dana bila 1,732 m. Istog dana, dužina najduže senke istog vertikalnog štapa je iznosila 5,671 m.

Nađi geografsku širinu posmatrača,  $\phi$ , i deklinaciju Sunca tog dana,  $\delta_\odot$ . Smatraj da je Sunce tačkasti izvor i zanemari atmosfersku refrakciju.

**(T5) Tranzit GMRT snopa**

Giant Metrewave Radio Telescope (GMRT), jedan od najvećih svetskih radio teleskopa na metarskim talasnim dužinama, lociranom u zapadnoj Indiji (geografska širina:  $19^\circ 6' N$ , geografska dužina:  $74^\circ 3' E$ ). GMRT se sastoji od trideset radio antena, svaka sa tanjirom prečnika 45,0 m. Osa jednog tanjira GMRT je fiksirana i pokazuje ka zenitnom uglu  $39^\circ 42'$  duž severnog meridijana tako da tačkasti radio izvor prolazi duž prečnika njegovog radio snopa, prilikom prolaska kroz meridijan.

Kolika je dužina trajanja tranzita  $T_{\text{transit}}$  tokom koje će izvor biti u okviru FWHM (puna širina na polovini maksimuma) snopa jedne GMRT radio antene posmatrano na 200 MHz?

**Hint:** FWHM veličina snopa radio antene na određenoj talasnoj dužini odgovara ugaonoj rezoluciji tanjira. Pretpostaviti ravnomerno raspoređeno osvetljenje.

**(T6) Pulsacije cefeida**

Zvezda  $\beta$ -Doradus promenljiva zvezda tipa cefeida sa periodom pulsacije 9,84 dana. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je zvezda najsjajnija kada je najskupljenija (poluprečnika  $R_1$ ) i najslabija kada je najproširenija (poluprečnika  $R_2$ ). Radi jednostavnosti pretpostavi da zvezda pri širenju i skupljanju zadržava sferni oblik, i ponaša se kao apsolutno crno telo u svakom trenutku tokom ciklusa. Bolometrijska prividna veličina zvezde varira od 3,46 do 4,08. Iz merenja Doplerovog pomaka znamo da je tokom pulsacije srednja radijalna brzina skupljanja/širenja površi zvezde  $12,8 \text{ km s}^{-1}$ . Tokom perioda pulsacije, maksimum termalnog zračenja se pomera od 531,0 nm do 649,1 nm.

- (T6.1) Nađi odnos poluprečnika zvezde u najskupljenijem i najproširenijem stanju ( $R_1/R_2$ ). 7
- (T6.2) Nađi poluprečnike zvezde (u metrima) u najskupljenijem i najproširenijem stanju ( $R_1$  i  $R_2$ ). 3
- (T6.3) Izračunaj fluks zvezde,  $F_2$ , u najproširenijem stanju. 5
- (T6.4) Nađi rastojanje do zvezde,  $D_{\text{star}}$ , u parsecima. 5

**(T7) Optika teleskopa**

Idealni refraktor  $f$ -odnosa  $f/5$ , ima objektiv žižne daljine 100 cm i okular žižne daljine 1 cm.

- (T7.1) Koje je ugaono uvećanje teleskopa,  $m_0$ ? Koja je dužina teleskopa,  $L_0$ , t.j. rastojanje od objektiva do okulara? 4

Stavljanjem konkavnog sočiva (Barlow sočivo) između objektiva i inicijalne zajedničke žiže (glavne žiže) je čest način da se poveća ugaono uvećanje bez velikog povećanja dužine teleskopa. Sada je Barlow sočivo žižne 1 cm postavljeno između objektiva i okulara da bi se dupliralo uvećanje.

- (T7.2) Na kom rastojanju,  $d_B$ , od glavne žiže treba postaviti Barlow sočivo da bi se postiglo željeno dvostruko uvećanje? 6
- (T7.3) Koliko iznosi povećanje dužine teleskopa,  $\Delta L$ ? 4

Teleskop je sada namešten tako da ima isti objektiv, a u glavnoj žiži mu je postavljen CCD detektor (bez Barlow sočiva i okulara). Veličina svakog piksela CCD detektora je  $10 \mu\text{m}$ .

- (T7.4) Koliko će biti rastojanje u pikselima na CCDu,  $n_p$ , između centroida likova dveju zvezda udaljenih  $20''$  na nebu? 6

**(T8) Fotometrija U-opsega**

Zvezda prividne veličine  $m_U = 15,0$  u  $U$ -opsegu. Filter  $U$ -opsega smatrati idealnim, t.j., ima savršenu (100%) propustljivost unutar opsega i potpunu neprozračnost (0% transmisija) van opsega. Filter je centriran na 360 nm, i ima širinu 80 nm. Pretpostavi da Zvezda ima ravan spektar energije u zavisnosti od frekvencije. Konverzija između magnitude,  $m$ , u nekom opsegu i gustine fluksa,  $f$ , neke zvezde u Janskijima ( $1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$ ) data je sa

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy}$$

- (T8.1) Koliko približno fotona  $U$ -opsega,  $N_0$ , sa ove zvezde upada normalno na površinu od  $1 \text{ m}^2$  na vrhu Zemljine atmosfere svake sekunde? 8

Ova zvezda se posmatra u  $U$ -opsegu zemaljskim teleskopom, čije primarno ogledalo ima prečnik 2,0 m. Atmosferska ekstinkcija u  $U$ -opsegu tokom posmatranja je 50%. Možeš da pretpostaviš da je vidljivost ograničena isključivo difrakcijom. Srednji sjaj noćnog neba u  $U$ -opsegu je izmeren i iznosi  $22,0 \text{ mag/arcsec}^2$ .

- (T8.2) Koji je odnos,  $R$ , broja fotona u sekundi primljenih od zvezde i primljenih od neba, mereno na kružnom otvoru ugaonog prečnika  $2''$ ? 8
- (T8.3) U praksi, detektuje se samo 20% od fotona  $U$ -opsega koji padaju na primarno ogledalo. Koliko fotona,  $N_t$ , sa zvezde se detektuje po sekundi? 4

**(T9) Mars Orbiter Misija**

Indijska Mars Orbiter Mission (MOM) je lansirana pomoću Vozila za lansiranje polarnih satelita (Polar Satellite Launch Vehicle, PSLV) 5. novembra 2013. Suva masa MOM (telo + instrumenti) je bila

500 kg i nosila je gorivo mase 852 kg. U početku je smeštena u eliptičnu orbitu oko Zemlje sa perigejem na visini od 264,1 km i apogejem na visini od 23903,6 km, iznad površine Zemlje. Nakon povećanja orbite, MOM je prebačen na trans-Mars upadnu orbitu (Hohman orbita).

Pri prvom takvom povećanju orbite motori se uključuju na kratak vremenski period blizu perigeja, tako da se ravan orbite i perigej ne menjaju. Ovo rezultuje povećanjem impulsa satelita za  $1.73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$ . Ignoriši promenu mase pri sagorevanju goriva.

(T9.1) Koliko iznosi nova visina apogeja,  $h_a$ , iznad površine Zemlje, nakon ovog uključivanja motora? 14

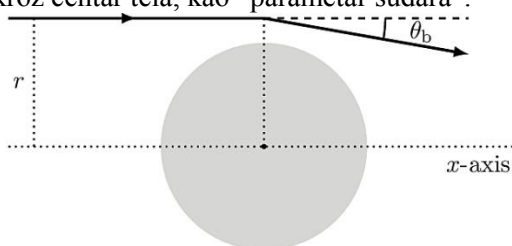
(T9.2) Nađi ekscentricitet ( $e$ ) nove orbite nakon uključivanja motora, kao i novi orbitalni period ( $P$ ) MOM izražen u satima. 6

**(T10) Teleskop gravitacionog sočiva**

Ajnštajnova Opšta teorija relativnosti predviđa savijanje svetlosnih zraka u prisustvu masivnih tela. Radi jednostavnosti, pretpostavljamo da se savijanje svetlosti odvija u po jednoj tački za svaki svetlosni zrak kao što je prikazano na slici. Ugao savijanja svetlosti,  $\theta_b$ , dat je sa:

$$\theta_b = \frac{2R_{sch}}{r}$$

Gde je  $R_{sch}$  Švarcšildov radijus tog gravitacionog tela (sočiva). Nazovimo rastojanje  $r$  svetlosnog zraka paralelnog  $x$ -osi koja prolazi kroz centar tela, kao "parametar sudara".



Masivno telo se, dakle, ponaša kao sabirno sočivo. Svetlosni zraci koji dolaze iz beskonačnosti u neposrednu okolinu tela, i imaju isti parametar sudara  $r$ , konvergiraju u tački na osi, na rastojanju  $f_r$  od centra masivnog tela. Posmatrač u toj tački će imati ogromno pojačanje zahvaljujući gravitacionom fokusiranju. Masivno telo se u ovom slučaju koristi kao teleskop gravitacionog sočiva za pojačanje dalekih signala.

(T10.1) Razmotri mogućnost korišćenja Sunca kao gravitacioni teleskop. Izračunaj rastojanje,  $f_{min}$ , od centra Sunca do tačke gde se svetlosni zraci fokusiraju (u astronomskim jedinicama). 6

(T10.2) Razmotri mali kružni detector poluprečnika  $a$ , na rastojanju  $f_{min}$  centriranog na  $x$ -osi i ortogonalan na nju. Imaj na umu da samo svetlosni zraci koji prolaze kroz prsten debljine  $h$  (where  $h \ll R_{\odot}$ ) oko Sunca padaju na detektor. Faktor pojačanja detektora se definiše kao odnos intenziteta svetlosti koja pada na detektor u prisustvu Sunca, i intenziteta svetlosti koja bi padala na detektor u odsustvu Sunca. 8

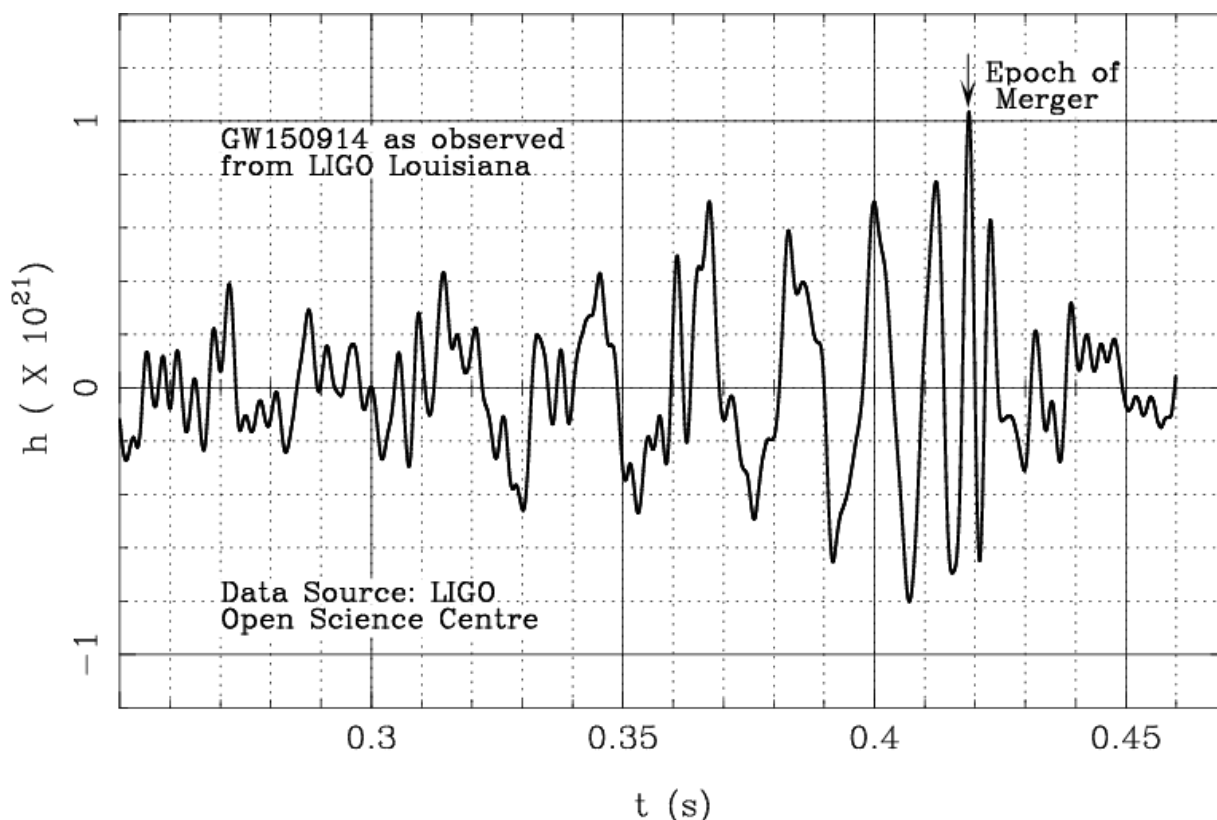
Izrazi factor pojačanja detektora,  $A_m$ , preko  $R_{\odot}$  i  $a$ .

(T10.3) Razmotri sfernu distribuciju mase, poput tamne materije u jatru galaksija, kroz koju svetlosni zraci mogu da prođu, uz gravitaciono savijanje. Radi jednostavnosti pretpostavi da je za gravitaciono savijanje zraka sa parametrom sudara  $r$ , odgovorna isključivo masa  $M(r)$  unutar poluprečnika  $r$ . 6

Koja treba da je distribucija mase,  $M(r)$ , tako da se gravitaciono sočivo ponaša kao idealno optičko konveksno sočivo?

**(T11) Gravitacioni talasi**

Prvi signali gravitacionih talasa zabeleženi su na dva napredna LIGO detektora, u mestima Hanford i Livingston, u SAD, u septembru 2015. Jedno od ovih merenja je prikazano na priloženom grafiku (istegnuće u zavisnosti od vremena u sekundama). U ovom zadatku, interpretiramo signal kao malu test masu  $m$  koja orbitira oko velike mase  $M$  (t.j.,  $m \ll M$ ), razmatrajući nekoliko modela prirode centralne mase.



Test masa gubi energiju emisijom gravitacionih talasa. To rezultuje skupljanjem orbite, dok test masa ne padne na površinu objekta, ili u slučaju crne rupe, najbližu stabilnu kružnu orbitu – ISCO – datu sa  $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{Sch}}$ , gde je  $R_{\text{Sch}}$  Švarcšildov radijus crne rupe. Ovo je “epoha spajanja”. U tom trenutku, amplituda gravitacionog talasa je maksimalna, kao i frekvencija, koja je uvek duplo veća od frekvencije orbitiranja. U ovom zadatku, fokusiramo se na gravitacione talase pre spajanja, kada se smatra da Keplerovi zakoni važe. Nakona spajanja, oblik gravitacionih talasa se menja.

(T11.1) Razmotri posmatrane gravitacione talase prikazane na grafiku iznad. Proceni period,  $T_0$ , i u nastavku frekvenciju,  $f_0$ , gravitacionih talasa pred spajanje. 3

(T11.2) Za zvezdu glavnog niza (MS), poluprečnik zvezde,  $R_{\text{MS}}$ , i masa,  $M_{\text{MS}}$ , povezani su stepenim zakonom, 10

$$R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^\alpha$$

gde je  $\alpha = 0,8$  za  $M_\odot < M_{\text{MS}}$   
 $\alpha = 1,0$  za  $0,08M_\odot \leq M_{\text{MS}} \leq M_\odot$

Ako je centralni objekat Zvezda glavnog niza, napiši izraz za maksimalnu frekvenciju gravitacionog talasa,  $f_{\text{MS}}$ , preko mase zvezde u jedinicama Sunčeve mase ( $M_{\text{MS}}/M_\odot$ ) i  $\alpha$ .

(T11.3) Koristeći gornji rezultat, odredi odgovarajuću vrednost  $\alpha$  koja daje maksimalnu moguću vrednost frekvencije gravitacionih talasa,  $f_{\text{MS,max}}$  za neku zvezdu glavnog niza. Izračunaj ovu vrednost frekvencije. 9

(T11.4) Beli patuljci (WD) imaju maksimalnu masu  $1,44 M_\odot$  (poznatu kao Čandrasekarova granica) i za njih važi relacija masa-poluprečnik  $R \propto M^{-1/3}$ . Poluprečnik belog patuljka Sunčeve mase jednak je 6000 km. Nađi najveću frekvenciju gravitacionih talasa,  $f_{\text{WD,max}}$ , ako test masa orbitira oko belog patuljka. 8

(T11.5) Neutronske zvezde (NS) su specifični kompaktni objekti mase između  $1$  i  $3M_\odot$  i poluprečnika u rasponu  $10 - 15$  km. Nađi opseg frekvencija emitovanih gravitacionih talasa,  $f_{\text{NS,min}}$  i  $f_{\text{NS,max}}$ , ako test masa orbitira oko neutronske zvezde na rastojanju blizu poluprečnika neutronske zvezde. 8

(T11.6) Ako test masa orbitira oko crne rupe (BH), napiši izraz za frekvenciju emitovanih gravitacionih talasa,  $f_{\text{BH}}$ , preko mase crne rupe,  $M_{\text{BH}}$ , i mase Sunca  $M_\odot$ . 7

(T11.7) Samo na osnovu perioda (ili frekvencije) gravitacionih talasa pre epohe spajanja, odredi da li centralni objekat može da bude zvezda glavnog niza (MS), beli patuljak (WD), neutronska zvezda (NS), ili crna rupa (BH). Štikliraj tačnu opciju u Listu za odgovore. Proceni masu ovog objekta,  $M_{\text{obj}}$ , u jedinicama mase Sunca  $M_{\odot}$ .

5

**(T12) Egzoplanete**

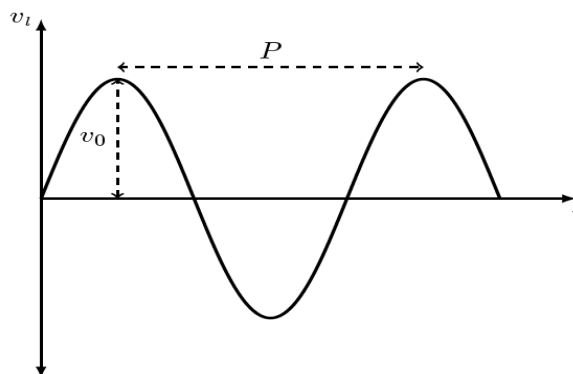
Dve glavne metode detekcije egzoplaneta (planete koje kruže oko zvezda van Sunčevog sistema) su metod radijalne brzine (takozvani “metod klimanja”) i metod tranzita. U ovom zadatku, istražujemo kako kombinacija rešenja ove dve metode može da otkrije mnogo informacija o egzoplaneti i zvezdi oko koje orbitira.

U ovom zadatku posmatramo slučaj planete mase  $M_p$  i poluprečnika  $R_p$ , koja se kreće po kružnoj orbiti poluprečnika  $a$  oko zvezde mase  $M_s$  ( $M_s \gg M_p$ ) i poluprečnika  $R_s$ . Normala na orbitalnu ravan planete je nagnuta pod uglom  $i$  u odnosu na pravac vizure ( $i = 90^\circ$  bi značilo orbitu “postrance”). Smatramo da nema drugih planeta koje orbitiraju oko ove zvezde, kao i da je  $R_s \ll a$ .

**“Metod klimanja”:**

Kada planeta i zvezda kruže oko njihovog baricentra, zvezda se pomera neznatno (klima se), zato što se centar mase zvezde ne poklapa sa baricentrom sistema. Kao rezultat, uočljiv je mali Doplerov pomak svetlosti emitovane sa zvezde povezan sa radijalnom brzinom zvezde usled tog klimanja.

Radijalna brzina zvezde,  $v_l$ , može se odrediti pomoću Doplerovog pomaka referentne spektralne linije. Periodične promene radijalne brzine sa vremenom,  $t$ , prikazane su shematski na donjem dijagramu. Dve veličine koje se mogu meriti ovim metodom, orbitalni period  $P$  i maksimalna radijalna brzina  $v_0$ , prikazane su na dijagramu.



(T12.1) Izvedi izraze za poluprečnik orbite ( $a$ ) i orbitalnu brzinu ( $v_p$ ) planete preko  $M_s$  i  $P$ .

3

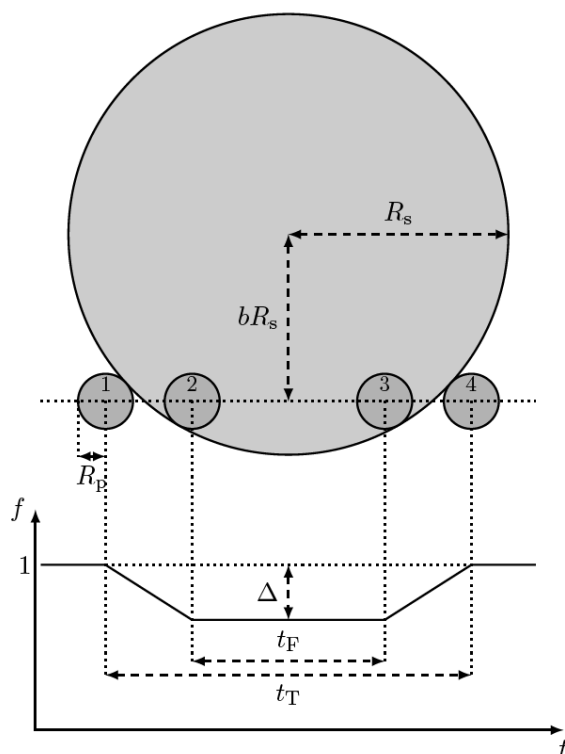
(T12.2) Nadi donju granicu mase planete,  $M_{p,\text{min}}$  izraženu preko  $M_s$ ,  $v_0$  i  $v_p$ .

4

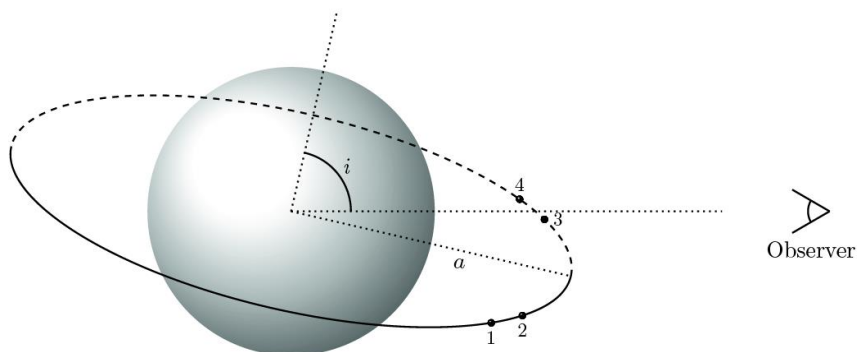
**Metod Tranzita:**

Ako je orbitalna ravan planete orijentisana tako da je  $i \approx 90^\circ$ , planeta će periodično prelaziti preko diska zvezde (“tranzit”). Taj prelaz će izazivati mali pad u posmatranom fluksu zračenja zvezde koji može da se meri. Shematski dijagram (NIJE u razmeri) prikazuje krivu sjaja posmatranog tranzita (normalizovan fluks u funkciji vremena) za ravnomerno sjajan disk zvezde.

Ako je ugao inklinacije  $i$  tačno  $90^\circ$ , planeta će prelaziti preko diska zvezde tačno po prečniku. Za druge vrednosti  $i$ , prelaz se dešava duž sečice diska zvezde, čiji se centar nalazi na rastojanju  $bR_s$  od centra diska, kao što je prikazano. Fluks pre i posle tranzita je normiran na 1, a maksimalni pad sjaja tokom tranzita je  $\Delta$ .



Četiri značajna trenutka tranzita su prvi, drugi, treći i četvrti kontakt, označeni brojevima od 1 do 4, tim redom, na slici gore. Vremenski interval između drugog i trećeg kontakta (kada je disk planete u potpunosti preklapa disk zvezde) označen je sa  $t_F$ . Vremenski interval između prvog i četvrtog kontakta označen je sa  $t_T$ . Ovi trenuci prikazani su i na shematskom dijagramu ispod koji ilustruje pogled na tranzit “sa strane” (slika NIJE u razmeri).



Veličine koje se mogu meriti metodom tranzita su:  $P$ ,  $t_T$ ,  $t_F$  i  $\Delta$ .

(T12.3) Naći ograničenje za  $i$  izraženo preko  $R_s$  i  $a$  tako da tranzit uopšte može biti vidljiv.

(T12.4) Izrazi  $\Delta$  preko  $R_s$  i  $R_p$ .

(T12.5) Izrazi  $t_T$  i  $t_F$  preko  $R_s$ ,  $R_p$ ,  $a$ ,  $P$  i  $b$ .

2

1

8

- (T12.6) Neka je poluprečnik orbite planete mnogo veći od poluprečnika zvezde. Pokaži da je parameter  $b$  dat izrazom: 5

$$b = \left[ 1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

- (T12.7) Koristeći rezultat iz dela (T13.6) i odgovarajuću aproksimaciju, nađi izraz za odnos  $a/R_s$  preko parametara tranzita koji mogu da se mere. 3

- (T12.8) Kombinujući rezultate ova dva metoda (“klimanja” i tranzita) odredi srednju gustinu zvezde  $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$  preko  $t_T$ ,  $t_F$ ,  $\Delta$  i  $P$ . 6

**Stenovita ili gasovita planeta:**

Posmatrajmo sistem zvezda-planeta postrance ( $i = 90^\circ$ ) sa Zemlje (orbita planete je kružna). Poznato je da je masa zvezde jednaka  $1,00M_\odot$ . Orbitalni period planete ( $P$ ) je 50,0 dana, a ukupno trajanje jednog tranzita ( $t_T$ ) je 1,00 h. Dubina tranzita ( $\Delta$ ) je 0,0064 (vidi sliku). Prilikom posmatranja istog sistema metodom radijalne brzine (“klimanja”) izmerena je maksimalna radijalna brzina od  $0,400 \text{ ms}^{-1}$ .

- (T12.9) Nađi poluprečnik orbite planete  $a$  u astronomskim jedinicama i u metrima. 2
- (T12.10) Nađi odnos  $t_F/t_T$  sistema. 2
- (T12.11) Odredi masu  $M_p$  i poluprečnik  $R_p$  planete izraženo preko mase Zemlje ( $M_\oplus$ ) i njenog poluprečnika ( $R_\oplus$ ). Šta je verovatnije: da je planeta stenovita ili gasovita? Štikliraj kvadratić za stenovitu (ROCKY) ili, za gasovitu (GASEOUS) na Listu za odgovore. 8

**Krive sjaja tranzita sa pegama na zvezdi i potamnjenjem ka rubu zvezde:**

- (T12.12) Razmotri tranzit planete sa orbitom inklinacije  $i = 90^\circ$  preko diska zvezde sa pegom na ekvatoru, pri čemu je poluprečnik pege približno jednak poluprečniku planete,  $R_p$ . Period rotacije zvezde je  $2P$ . Skiciraj shematske grafike pet uzastopnih krivih sjaja tranzita planete (u odgovarajuća polja na listu za odgovore). Fluks neposredno pre početka svakog tranzita može se nezavisno normirati na jedinicu. Smatraj da planeta tokom tranzita ne nailazi na pegu zvezde pri prvom, ali nailazi pri drugom tranzitu. 4
- (T12.13) Tokom zadatka razmatrali smo ravnomerno osvetljen disk zvezde. Međutim, realni diskovi zvezda imaju potamnjenje ka rubu. Na listu za odgovore shematski skiciraj krivu sjaja tranzita gde je prisutan efekat potamnjenja ka rubu. 2