

(T1) Pravda(True) alebo Nepravda(False)

Urči, pre každú z nasledovných 5 úloh, či je pravdivá, alebo nie. V odpoved'ovom hárku daj kvačku do príslušného obdĺžnika. Nie je potrebné dávať riešenia k T1.1 až T1.5.

- (T1.1) Na fotografii jasnej nočnej oblohy počas splnu Mesiaca po dostatočne dlhej expozícii sa farba oblohy môže naexponovať modrá ako počas dňa. 2
- (T1.2) Astronóm v Bhubaneswari označuje polohu Slnka na oblohe o 05:00 UT každý deň počas roka. Keby bola os rotácie Zeme kolmá na jej rovinu obehu, je jasné že tieto polohy by vytvorili kruh na oblohe. 2
- (T1.3) Ak orbitálna perióda planétky okolo Slnka na veľmi eliptickej dráhe je menšia ako orbitálna perióda Uránu, potom jej dráha musí byť vždy vo vnútri dráhy Uránu. 2
- (T1.4) Ťažisko Slnčnej sústavy je vždy vo vnútri Slnka. 2
- (T1.5) Fotón sa pohybuje vo voľnom priestore. Ako vesmír expanduje, je jasné že hybnosť fotónu klesá. 2

(T2) Plyny na Titáne

Plynné častice v planetárnej atmosfére majú široké rozdelenie rýchlostí. Ak r.m.s. (root mean square = stredná kvadratická hodnota) tepelného pohybu/rýchlosti častíc daného plynu prekročí 1/6 únikovej rýchlosti, potom väčšina tohto plynu unikne z planéty. Aká je minimálna atómová hmotnosť (relatívna atómová hmotnosť), A_{\min} , ideálneho jedno atomického plynu, ktorý zostáva v atmosfére (neuniká) Titánu? 10

Daná je hmotnosť Titánu $M_T = 1.23 \times 10^{23}$ kg, polomer Titanu $R_T = 2575$ km, povrchová teplota Titanu $T_T = 93.7$ K.

(T3) Raný Vesmír

Kozmologické modely indikujú, že hustota energie žiarenia vo vesmíre ρ_r , je úmerná $(1+z)^4$, a hustota energie hmoty ρ_m , je úmerná $(1+z)^3$, kde z je červený posuv. Bezrozmerný parameter hustoty, Ω , je daný ako $\Omega = \rho/\rho_c$, kde ρ_c je kritická hustota energie vesmíru. V súčasnom vesmíre parametre hustoty žiarenia a hmoty sú $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$ and $\Omega_{m_0} = 0.3$.

- (T3.1) Vypočítaj červený posuv z_e , v prípade ak hustota energie žiarenia a hustota energie hmoty sú rovnaké. 3
- (T3.2) Predpokladajme, že žiarenie z raného vesmíru má spektrum absolútne čierneho telesa s maximálnou teplotou 2.732 K. Vypočítaj teplotu žiarenia T_e , pre červený posuv z_e . 4
- (T3.3) Vypočítaj typickú energiu fotónu E_v (v eV) žiarenia pre červený posuv z_e , ktorú pozoruje súčasný pozorovateľ. 3

(T4) Tiene

Pozorovateľ na severnej pologuli nameral počas dňa najkratší tieň palice dĺžky 1.000 m, ktorý bol 1.732 m. V ten istý deň bol najdlhší tieň tejto palice 5.671 m. 10

Vypočítaj zemepisnú šírku ϕ , pozorovateľa a deklináciu Slnka δ_{\odot} v tento deň. Predpokladáme, že Slnko je bod a ignorujeme atmosférickú refrakciu.

(T5) GMRT tranzit lúča

Obrovský Radio Teleskop na metrové vlny (GMRT), jeden z najväčších na svete, je umiestnený v západnej Indii (zemepisná šírka: $19^{\circ}6' N$, zemepisná dĺžka: $74^{\circ}3' E$). GMRT je zložený z 30 parabolických antén s priemerom 45.0 m. Jedna anténa GMRT bola zafixovaná tak, že jej os smerovala do zenitovej vzdialenosti $39^{\circ}42'$ na severnom oblúku meridiánu tak, že bodový rádiový zdroj môže prechádzať priemerom zorného lúča (zorným poľom) antény keď tranzituje/prechádza cez meridián. 10

Vypočítajte dobu tranzitu T_{transit} , pri ktorom prechádza rádiový zdroj oblasťou FWHM (full width at half maximum = čo je plná šírka v polovici maxima) zorného lúča danej antény, ktorá pracuje na frekvencii 200 MHz?

Pomôcka: FWHM oblasť zorného lúča antény, ktorá pracuje na danej frekvencii odpovedá kruhovej oblasti o uhlovom polomere rovnému rozlišovacej schopnosti antény. Uvažuj homogénne osvetlenie.

(T6) **Pulzácie Cepheid**

Hviezda β -Doradus je premenná Cepheida s pulzačnou periódou 9.84 dní. Urobíme zjednodušujúci predpoklad, že hviezda je najjasnejšia, keď má najmenší polomer (R_1) a je najslabšia, keď má najväčší polomer (R_2). Ďalej predpokladáme, že hviezda si zachováva sférický tvar a je absolútne čierne teleso počas celého cyklu. Bolometrická magnitúda hviezdy kolíše od 3.46 do 4.08. Z Dopplerovho merania vieme, že počas pulzácie hviezdny povrch expanduje alebo kontrahuje priemernou 12.8 km s^{-1} . Počas pulzačnej periódy, maximálna hodnota tepelného žiarenia hviezdy kolíše od 531.0 nm do 649.1 nm.

- (T6.1) Vypočítaj pomer polomerov hviezdy v stave najväčšej kontrakcie ku najväčšej expanzii (R_1/R_2). 6
- (T6.2) Vypočítaj polomery hviezdy v metroch v stave najväčšej kontrakcie ku najväčšej expanzii (R_1 a R_2). 4
- (T6.3) Vypočítaj tok žiarenia hviezdy F_2 , keď je v stave najväčšej expanzie. 5
- (T6.4) Vypočítaj vzdialenosť hviezdy D_{star} , v parsekoch. 5

(T7) **Optika Teleskopu**

V danom refraktore s ohniskovým pomerom (svetelnosť) $f/5$, ohnisková vzdialenosť objektívu je 100 cm a okuláru je 1 cm.

- (T7.1) Aké je zväčšenie ďalekohľadu m_0 ? Aká je jeho dĺžka L_0 čiže dĺžka medzi objektívom a okulárom? 4

Konkávna (Barlowova) šošovka sa dáva medzi objektív a primárne ohnisko a slúži na zvýšenie zväčšenia ďalekohľadu, pričom sa dĺžka ďalekohľadu predĺži len minimálne. V tomto prípade Barlowova šošovka s ohniskovou vzdialenosťou 1 cm zvýši zväčšenie ďalekohľadu až dvojnásobne.

- (T7.2) V akej vzdialenosti d_B od primárneho ohniska musí byť Barlowova šošovka aby si dostal dvojnásobné zväčšenie ďalekohľadu? 6
- (T7.3) Aké je v prípade použitia Barlowovej šošovky predĺženie ΔL celkovej dĺžky ďalekohľadu? 4

Ďalekohľad vybavíme CCD detektorom, ktorý je v primárnom ohnisku (bez Barlowovej šošovky a bez okuláru). Rozmer každého pixelu CCD je $10 \mu\text{m}$.

- (T7.4) Aká je vzdialenosť v pixeloch n_p , na CCD stredov obrazov 2 hviezd, ktoré sú vzdialené od seba na oblohe $20''$ (20 oblúkových sekúnd)? 6

(T8) **U-Band fotometria**

Hviezda má zdanlivú magnitúdu $m_U = 15.0$ v U -filtrí. U -filter je ideálny, čiže má (100%) priepustnosť a je úplne nepriehľadný mimo svojho pásma (0% priepustnosť). Filter je centrován na 360 nm, a má šírku pásma 80 nm. Predpokladáme, že aj hviezda má ploché rozdelenie energie v spektre s ohľadom na frekvenciu. Konverzia medzi magnitúdou m do ľubovoľného pásma a hustoty toku f hviezdy v jednotkách Jansky ($1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$) je daná vzťahom

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy}$$

- (T8.1) Priemerne koľko fotónov v U -filtrí N_0 od tejto hviezdy dopadne na plochu 1 m^2 do atmosféry Zeme za každú sekundu? 8

Táto hviezda je pozorovaná v U -filtrí pozemským ďalekohľadom s priemerom zrkadla 2.0 m. Atmosférická extinkcia v U -filtrí počas pozorovania je 50%. Predpokladajme, že seeing je dokonalý. Priemerná povrchová jasnosť nočnej oblohy v U -filtrí bola zmeraná a je $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$.

- (T8.2) Vypočítaj pomer R počtu fotónov získaných za sekundu od hviezdy voči tým od oblohy, keď meriame s apertúrou s priemerom $2''$ (so vstupným otvorom)? 8
- (T8.3) V praxi iba 20% fotónov v U -filtrí, ktoré dopadnú na primárne zrkadlo je detegovaných. Koľko fotónov N_t je detegovaných z tejto hviezdy za sekundu? 4

(T9) **Mars Orbiter Mission**

Indický Mars Orbiter Mission (MOM) bol vypustený pomocou polárneho satelitu Polar Satellite Launch Vehicle (PSLV) 5 novembra 2013. Čistá hmotnosť MOM (teleso satelitu + prístroje) bola 500 kg a obsahoval palivo o hmotnosti 852 kg. Pôvodne bol umiestnený na eliptickú dráhu okolo Zeme s perigeom vo výške 264.1 km a apogeom vo výške 23903.6 km. Po zväčšení dráhy 6-krát, MOM bol prepravený na trans-Mars štartovaciu dráhu (Hohmanova dráha).

Prvé takéto zväčšenie dráhy bolo vykonané zapálením motora na veľmi krátky čas blízko perigea. Motor bol zapálený, pričom nezmenil rovinu dráhy ani vzdialenosť perigea. Toto dalo satelitu čistý impulz $1.73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$. Ignoruj zmenu hmotnosti vplyvom horenia paliva.

(T9.1) Aká je výška nového apogea, h_a nad povrchom Zeme po tomto impulze? 12

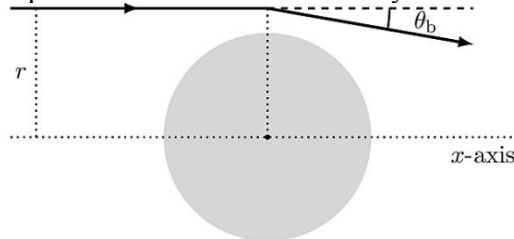
(T9.2) Vypočítaj excentricitu (e) novej dráhy po impulze a novú orbitálnu periódu (P) MOM v hodinách. 8

(T10) **Gravitačné šošovkovanie**

Einsteinova obecná teória relativity predpovedá ohyb svetla okolo hmotných telies. Pre zjednodušenie predpokladáme, že ohyb svetla sa deje v jednom bode pre každý svetelný lúč, ako ukazuje obrázok. Uhol ohybu θ_b , je daný vzorcom:

$$\theta_b = \frac{2R_{\text{Sch}}}{r}$$

kde R_{Sch} je Schwarzschildov polomer hmotného telesa. Hovoríme, že r , je vzdialenosť prichádzajúceho svetla od paralelnej osi x , ktorá prechádza stredom telesa a nazýva sa to "impakt parameter".



Každé teleso sa vlastne chová ako šošovka v optike. Svetlo prichádzajúce spoza telesa sa s impaktným parametrom r , konverguje do bodu vo vzdialenosti f_r od centra telesa. Pozorovateľ získava na obrovskom zosilnení vzdialeného signálu.

(T10.1) Uvažujme, že naše Slnko je ako gravitačný teleskop. Vypočítaj najmenšiu vzdialenosť, f_{min} , od stredu Slnka (v A. U.) pri ktorej sa svetlo fokusuje, to je vtedy, keď sa impakt parameter rovná polomeru slnka. 6

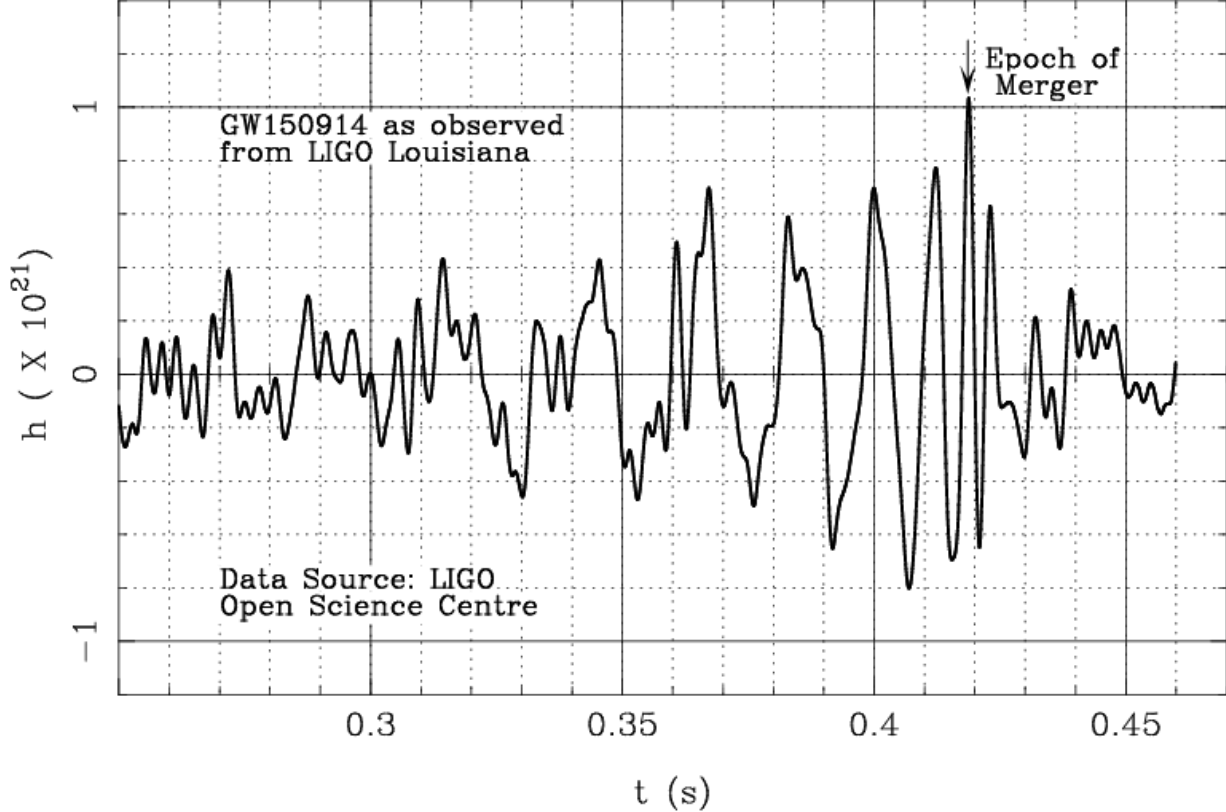
(T10.2) Uvažujme malý kruhový detektor s polomerom " a " umiestnený vo vzdialenosti f_{min} na osi x a orientovaný kolmo na túto os. Všimni si, že iba prstenec (zväzok) svetelných lúčov so šírkou h (kde $h \ll R_{\odot}$) narazí na tento detektor. Faktor zosilnenia na detektore je definovaný ako pomer intenzity svetla, ktoré dopadne na detektor za prítomnosti Slnka a intenzity bez prítomnosti Slnka. 8

Vypočítaj tento faktor zosilnenia A_m , na detektor v zmysle R_{\odot} a " a ".

(T10.3) Uvažujme sférické rozloženie hmoty ako je tmavá hmota v kope galaxií, cez ktorú svetlo môže prejsť ale podlieha gravitačnému ohybu. Predpokladáme gravitačný ohyb s impakt parametrom r , len pre hmotnosť $M(r)$, ktorá je sústredená vo vnútri polomeru r . Aké by malo byť rozdelenie hmoty $M(r)$, aby sa gravitačná šošovka chovala ako konvexná optická šošovka? 6

(T11) Gravitačné vlny

Prvý signál gravitačných vln bol detegovaný dvoma LIGO detektormi v USA v Septembri 2015. Jedno z týchto meraní (amplitúda voči času v sekundách) je ukázané na obrázku. V tejto úlohe budeme interpretovať tento signál ako test hmotnosti m obiehajúcej okolo veľkej hmotnosti M (i.e., $m \ll M$), pričom uvažujeme niekoľko modelov pre centrálnu hmotnosť.



Testovacia hmotnosť stráca energiu vplyvom vyžarovania gravitačných vln. Výsledkom je, že dráha sa scvrkáva, pokiaľ testovacia hmotnosť nedosiahne povrch centrálného objektu, alebo v prípade čiernej diery najvnútornejšiu stabilnú dráhu – ISCO – ktorá je daná ako $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{sch}}$, kde R_{sch} je Schwarzschildov polomer čiernej diery. Dosiahnutie tejto dráhy je zároveň aj okamih splynutia obidvoch objektov “epoch of merger”. V tomto okamihu je amplitúda gravitačných vln maximálna a aj ich frekvencia, ktorá je vždy dvojnásobkom orbitálnej frekvencie. V tejto úlohe sa zameriame na gravitačné vlny pred splynutím, keď platia Keplerove zákony. Po splynutí sa gravitačné vlny drasticky menia.

(T11.1) Uvažujeme pozorované gravitačné vlny na obrázku hore. Vypočítajte periódu T_0 , a z toho vypočítajte frekvenciu gravitačných vln tesne pred okamžikom splynutia. 3

(T11.2) Pre ľubovoľnú hviezdu hlavnej postupnosti (MS) polomer hviezdy R_{MS} , a jej hmotnosť M_{MS} , sú vyjadrené vzájomným vzťahom: 10

$$R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^{\alpha}$$

kde $\alpha = 0.8$ pre $M_{\odot} < M_{\text{MS}}$
kde $\alpha = 1.0$ pre $0.08M_{\odot} \leq M_{\text{MS}} \leq M_{\odot}$

Ak centrálny objekt bude hviezda hlavnej postupnosti, napíš vzťah pre maximálnu hodnotu frekvencie gravitačných vln f_{MS} , v zmysle hmotnosti hviezdy v jednotkách hmotnosti Slnka (M_{MS}/M_{\odot}) a α .

(T11.3) Využívajúc predchádzajúci výsledok, vypočítaj najvhodnejšiu hodnotu α , ktorá dá maximálnu možnú frekvenciu gravitačných vln $f_{\text{MS,max}}$ pre ľubovoľnú hviezdu hlavnej postupnosti. Vypočítaj túto frekvenciu. 9

(T11.4) Biele trpaslíky (WD) majú maximálnu hmotnosť $1.44 M_{\odot}$ (Chandrasekhar limit) a spĺňajú vzťah $R \propto M^{-1/3}$. Polomer bieleho trpaslíka o hmotnosti Slnka je rovný 6000 km. Vypočítaj najvyššiu frekvenciu emitovaných gravitačných vln, $f_{\text{WD,max}}$ ak testovacia hmotnosť obieha okolo bieleho trpaslíka. 8

- (T11.5) Neutrónové hviezdy (NS) sú kompaktné objekty s hmotnosťou 1 až $3M_{\odot}$ a polomeri v rozsahu 10 – 15 km. Vypočítaj rozsah frekvencií emitovaných gravitačných vln $f_{NS,min}$ a $f_{NS,max}$, ak testovacia hmotnosť obieha neutrónovú hviezdu tesne v blízkosti jej polomeru. 8
- (T11.6) Ak testovacia hmotnosť obieha okolo čiernej diery (BH), vypočítaj frekvenciu emitovaných gravitačných f_{BH} , v zmysle hmotnosti čiernej diery M_{BH} , a a hmotnosti M_{\odot} . 7
- (T11.7) Hladiac iba na periódu alebo frekvenciu gravitačných vln pred epochou splynutia, ako detegoval LIGO, určí či centrálny objekt môže byť hviezda hlavnej postupnosti (MS), biely trpaslík (WD), neutrónová hviezda (NS), alebo čierna diera (BH). Zakvačkuj správnu odpoveď v odpovedovom hárku. Vypočítaj hmotnosť tohto objektu M_{obj} , v jednotkách hmotnosti Slnka M_{\odot} . 5

(T12) Exoplanéty

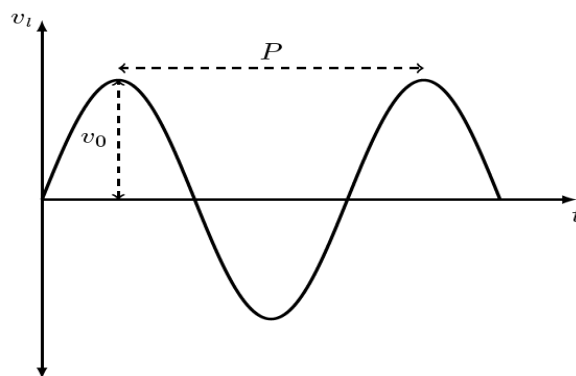
Na detegovanie exoplanét existujú 2 metódy, metóda radiálnych rýchlostí nazývaná aj WOBLE metóda a metóda tranzitov. V tejto úlohe ukážeme ako kombinácia týchto metód môže priniesť veľa informácií o obiehajúcej exoplanéte ako aj o hostiteľskej hviezde.

Uvažujeme planétu hmotnosti M_p a polomeru R_p obiehajúcej po kruhovej dráhe s polomerom „ a “ okolo hviezdy o hmotnosti M_s ($M_s \gg M_p$) a s polomerom R_s . Normála k orbitálnej rovine planéty je sklonená pod uhlom i vzhľadom k zornému lúču ($i = 90^\circ$ znamená, že dochádza k zákrytom a tranzitom „edge on orbit“). Predpokladáme, že v sústave nie je ďalšia planéta a $R_s \ll a$.

“Wobble” Metóda:

Keď planéta a hviezda obiehajú navzájom okolo barycentra, je vidieť že hviezda sa mierne pohybuje k nám a od nás a vykonáva malý ale merateľný Dopplerovský posuv.

Rýchlosť tohto posuvu v_t , hviezdy môže byť určená Dopplerovou metódou zo známych spektrálnych čiar a takýto periodický pohyb za čas t je ukázaný na nasledovnom obrázku. Na obrázku sú ukázané dve merateľné hodnoty, hlavne perióda P a maximálna rýchlosť v smere zorného lúča v_0 .

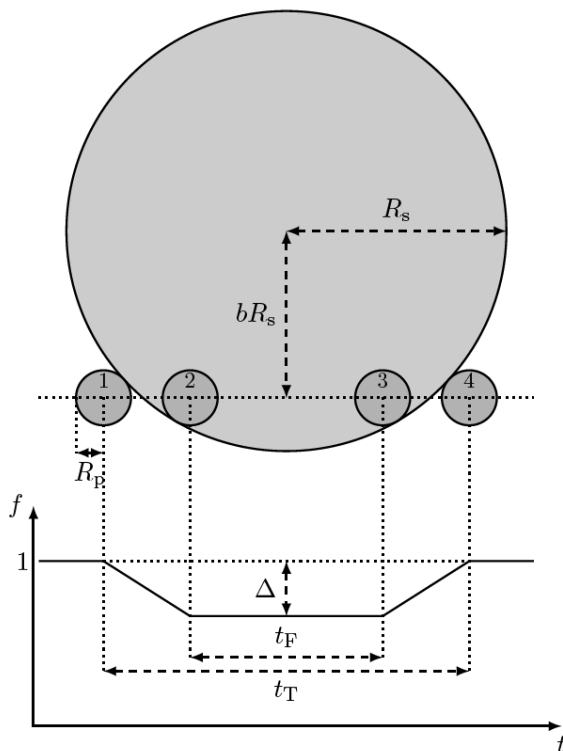


- (T12.1) Vypočítaj orbitálny polomer (a) a orbitálnu rýchlosť (v_p) planéty v zmysle M_s a P . 3
- (T12.2) Vypočítaj dolnú hranicu hmotnosti planéty $M_{p,min}$ v zmysle M_s , v_0 a v_p . 4

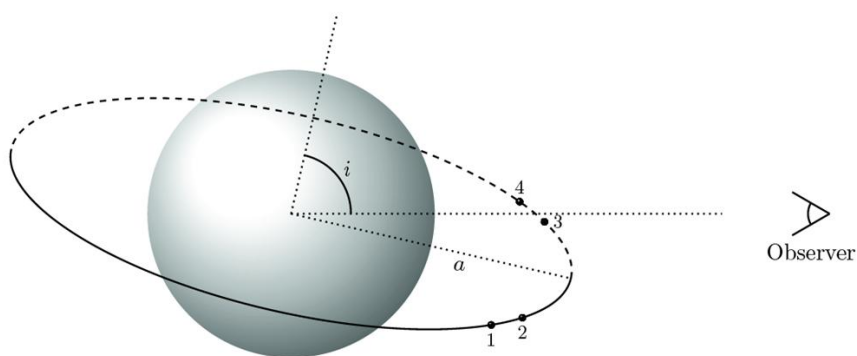
Metóda Tranzitu:

Ak planéta obieha okolo hostiteľskej hviezdy a ($i \approx 90^\circ$), a bude periodicky nastávať tranzit planéty pred diskom hviezdy prejaví sa to miernym poklesom jasnosti alebo toku. Obrázok ukazuje situáciu pozorovateľovej perspektívy a výsledná svetelná krivka (normalizovaný tok f , v závislosti na čase t) je platná pre homogénne jasný hviezdny disk.

Ak je sklon i presne 90° , planétu je možné pozorovať pred diskom cez celý jeho priemer. Pre mierne menšiu hodnotu i , tranzit nastáva na okraji vo vzdialenosti bR_s od stredu hviezdneho disku. Tok mimo tranzitu je normalizovaný na 1 a maximálny pokles počas tranzitu je definovaný ako Δ .



Štyri dôležité body tranzitu sú prvý, druhý, tretí a štvrtý kontakt označený ako 1 až 4 v uvedenom obrázku. Časové intervaly kontaktov 2 a 3 sú t_F a 1 a 4 kontakt sú t_T z obrázku. Tieto body sú na dolnom obrázku označené pri pohľade z boku.



Merateľné hodnoty pri metóde Tranzitu sú P , t_T , t_F a Δ .

- (T12.3) Nájdi podmienku pre i v zmysle R_s a a tak aby tranzit bol viditeľný pre vzdialeného pozorovateľa. 2
- (T12.4) Vyjadri Δ v zmysle R_s a R_p . 1
- (T12.5) Vyjadri t_T a t_F v zmysle R_s , R_p , a , P a b . 8
- (T12.6) V priblížení, keď dráha planéty je oveľa väčšia ako polomer hviezdy, ukáž že parameter b je daný vzťahom: 5

$$b = \left[1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

(T12.7) Použi výsledok časti (T13.6) na získanie vzťahu pre pomer a/R_s v zmysle merateľných parametrov tranzitu za použitia vhodnej aproximácie. 3

(T12.8) Kombinuj výsledky wobble metódy a metódy tranzitu na určenie strednej hustoty hviezdy $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$ v zmysle t_T, t_F, Δ a P . 6

Kamenné alebo plynové:

Uvažujme planetárny systém ($i = 90^\circ$) (kruhovú dráhu), pozorovaný zo Zeme. Vieme že hviezda má hmotnosť $1.00M_\odot$. Transity sú pozorované s periódou (P) 50.0 dní a trvanie tranzitu (t_T) je 1.00 hod. Hĺbka tranzitu depth (Δ) je 0.0064. Taký istý systém je pozorovaný metódou wobble s maximálnou rýchlosťou v zornom lúči rovnou 0.400 ms^{-1} .

(T12.9) Vypočítaj orbitálny polomer planéty a v jednotkách AU a v metroch. 2

(T12.10) Nájdi pomer t_F/t_T systému. 2

(T12.11) Vypočítaj hmotnosť planéty M_p a jej polomer R_p v zmysle hmotnosti (M_\oplus) a polomere (R_\oplus) Zeme. Je zloženie planéty kamenné alebo plynné? Odfajkni v obdĺžniku ROCKY alebo GASEOUS v odpoved'ovom hárku. 8

Svetelné krivky tranzitu so škvrnami na hviezde a s okrajovým stemnením:

(T12.12) Uvažujme planetárny tranzit s $i = 90^\circ$ a s hviezdou, ktorá má škvrnu na svojom rovníku o veľkosti porovnateľne s rozmerom planéty R_p . Rotačná perióda hviezdy je $2P$. Nakresli schematicky svetelnú krivku tranzitu pre päť po sebe idúcich tranzitov (do šablón v odpoved'ovom hárku). Tok v každom párnom tranzite je v tomto prípade normalizovaný na inú hodnotu nezávislú od každého nepárneho tranzitu. Predpokladajme, že planéta nezakrýva škvrnu na hviezde počas prvého tranzitu, ale s krátkym vzrastom až počas druhého tranzitu. 4

(T12.13) Doterajšie problémy sme uvažovali s homogénne jasným stelárnym diskom. V skutočnom prípade je disk hviezdy na okraji tmavší, čo sa nazýva okrajové stemnenie disku. Nakresli schematicky svetelnú krivku tranzitu, keď okrajové stemnenie je prítomné na hostiteľskej hviezde. 2