

(T1) True or False

จงพิจารณาข้อความด้านล่างว่าถูกหรือผิด และให้ทำเครื่องหมายในช่อง “TRUE” (ถูก) หรือ “FALSE” (ผิด) ของแต่ละข้อย่อย ในกระดาษคำตอบ “Summary Answersheet” ไม่จำเป็นต้องเขียนอธิบายเหตุผล

(T1.1) ในคืนที่ดวงจันทร์เต็มดวง หากเราถ่ายภาพท้องฟ้าที่โปร่งใสไม่มีเมฆ (clear sky) โดยเปิดหน้ากล้อง (exposure) เป็นระยะเวลาสั้นเพียงพอ ภาพท้องฟ้าจะมีสีฟ้าเหมือนท้องฟ้าในเวลากลางวัน 2

(T1.2) นักดาราศาสตร์ที่เมืองภูปเนศวร (Bhubaneswar) ทำการบันทึกตำแหน่งของดวงอาทิตย์บนท้องฟ้า ณ เวลา 05:00 UT ของทุกวันเป็นเวลา 1 ปี ถ้าหากกำหนดให้ว่าแกนหมุนรอบตัวเองของโลกตั้งฉากกับระนาบวงโคจรของโลก ตำแหน่งที่ทำการบันทึกไว้ดังกล่าวจะสามารถต่อเป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของเส้น great circle 2

(T1.3) ถ้าหากวงโคจรของวัตถุใดๆรอบดวงอาทิตย์มีคาบสั้นกว่าคาบวงโคจรของดาวยูเรนัส แสดงว่าวงโคจรของวัตถุนั้นทั้งวงโคจรจะต้องอยู่ระหว่างดวงอาทิตย์และแนววงโคจรของยูเรนัส 2

(T1.4) จุดศูนย์กลางมวลของระบบสุริยะอยู่ในดวงอาทิตย์ตลอดเวลา 2

(T1.5) โฟตอนที่เคลื่อนที่อยู่ในอวกาศ (free space) จะมีค่าโมเมนตัมที่ลดลงจากการที่จักรวาลขยายตัว 2

(T2) Gases on Titan 10

อนุภาคแก๊สในบรรยากาศของดาวเคราะห์มีการกระจายตัวของความเร็วที่กว้าง ถ้าหากความเร็ว (thermal speed) ของอนุภาคแก๊สมีค่า r.m.s. (root mean square) สูงกว่า 1/6 ของความเร็วหลุดพ้น (escape speed) แก๊สส่วนใหญ่จะสามารถหนีจากอิทธิพลแรงโน้มถ่วงของดาวเคราะห์ดวงนั้นได้ จงหามวลอะตอม (atomic mass) ที่น้อยที่สุด  $A_{\min}$  สำหรับแก๊สอะตอมเดี่ยวที่จะสามารถคงอยู่ในบรรยากาศของดวงจันทร์ Titan ได้

ดวงจันทร์ Titan มีมวล  $M_T = 1.23 \times 10^{23}$  kg รัศมี  $R_T = 2575$  km และอุณหภูมิพื้นผิว  $T_T = 93.7$  K

(T3) Early Universe

ในแบบจำลองเอกภพ ความหนาแน่นพลังงานของรังสี (radiation energy density)  $\rho_r$  แปรผันตามความสัมพัทธ์  $(1+z)^4$  และความหนาแน่นพลังงานของสสาร (matter energy density)  $\rho_m$  แปรผันตามความสัมพัทธ์  $(1+z)^3$  เมื่อ  $z$  คือค่าเรดชิฟท์ (redshift) ค่าพารามิเตอร์ความหนาแน่น (density parameter)  $\Omega = \rho/\rho_c$  โดยที่  $\rho_c$  คือความหนาแน่นวิกฤต (critical energy density) ของเอกภพ ค่าความหนาแน่นพลังงานสำหรับรังสีและสสารของเอกภพในปัจจุบันคือ  $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$  และ  $\Omega_{m_0} = 0.3$  ตามลำดับ

(T3.1) จงคำนวณค่าเรดชิฟท์  $z_e$  ที่ความหนาแน่นพลังงานรังสีและสสารในเอกภพมีค่าเท่ากัน 3

(T3.2) หากกำหนดให้ว่ารังสีจากเอกภพในยุคต้นมีสเปกตรัมแบบวัตถุดำ (blackbody spectrum) ซึ่งมีอุณหภูมิในปัจจุบันเท่ากับ 2.732 K จงคำนวณอุณหภูมิ  $T_e$  ของรังสีในตอนที่เอกภพมีค่าเรดชิฟท์  $z_e$  4

(T3.3) จงคำนวณพลังงานเฉลี่ยของโฟตอน ( $E_\nu$ ) ในหน่วย eV ในตอนที่เอกภพมีค่าเรดชิฟท์  $z_e$  3

(T4) Shadows 10

ผู้สังเกตการณ์ที่อยู่ในซีกโลกเหนือ ทำการทดลองวันหนึ่งพบว่าเงาที่สั้นที่สุดของแท่งไม้ที่มีขนาดในแนวตั้ง 1.000 เมตร มีความยาว 1.732 เมตร ในวันเดียวกันนั้นเขาพบว่าเงาของแท่งไม้อันเดิมมีความยาวมากที่สุดเท่ากับ 5.671 เมตร

จงหาตำแหน่งละติจูด  $\phi$  ของผู้สังเกตการณ์และ declination ของดวงอาทิตย์ในวันที่ผู้สังเกตการณ์ทำการทดลอง โดยให้คิดว่าดวงอาทิตย์เป็นจุดแสง (point source) และไม่ต้องคำนึงถึงการหักเหของแสงโดยชั้นบรรยากาศ

(T5) **GMRT beam transit**

กล้อง Giant Metrewave Radio Telescope (GMRT) เป็นหนึ่งในกล้องโทรทรรศน์วิทยุที่ใหญ่ที่สุดในโลกทำงานที่ความยาวคลื่นย่านเมตร ตั้งอยู่ในเขตตะวันตกของประเทศอินเดีย (ละติจูด  $19^{\circ}6' N$  ลองจิจูด  $74^{\circ}3' E$ ) กล้อง GMRT ประกอบไปด้วยจานรับสัญญาณขนาด 45 เมตร จำนวน 30 จาน หนึ่งในจานเดี่ยวของ GMRT อยู่หนึ่งและถูกเลี้ยงไปยังจุดบนเส้นเมริเดียนทางด้านเหนือของจุดเซนิท (zenith) เป็นมุม  $39^{\circ}42'$  ซึ่งมีผลให้เทหะวัตถุที่ปล่อยคลื่นวิทยุที่เป็นจุด (radio point source) เคลื่อนที่ผ่านเส้นผ่านศูนย์กลางของ beam pattern ของจานรับสัญญาณ ในขณะที่วัตถุนั้นเคลื่อนที่ผ่านเส้นเมริเดียน จงหาระยะเวลา  $T_{\text{transit}}$  ที่วัตถุดังกล่าวอยู่ภายใน FWHM (Full Width at Half Maximum) ของ beam pattern ของจานรับสัญญาณดังกล่าว ซึ่งทำงานที่ความถี่ 200 MHz

**Hint:** ขนาด FWHM ของ beam pattern ของจานรับสัญญาณวิทยุทำงานที่ความถี่ใดๆ สามารถคำนวณได้จาก angular resolution ของจานรับสัญญาณที่ความถี่นั้นๆ โดยกำหนดให้จานได้รับสัญญาณสม่ำเสมอทั่วทั้งจาน

10

(T6) **Cepheid Pulsations**

ดาว  $\beta$ -Doradus เป็นดาวแปรแสงเซฟีอิด (Cepheid variable) มีคาบ 9.84 วัน เพื่อความง่ายในการคำนวณหากเราสมมติให้ดาวมีความสว่างมากที่สุดเมื่อดาวหดตัวเล็กที่สุด (รัศมี  $R_1$ ) และมีความสว่างน้อยที่สุดเมื่อดาวขยายตัวใหญ่ที่สุด (รัศมี  $R_2$ ) ให้กำหนดเพิ่มว่าดาวรักรักรูปทรงกลมและความเป็นวัตถุดำสมบูรณ์แบบ (perfect black body) ตลอดทั้งวัฏจักรการหดและขยายตัว ในขณะที่ความสว่างรวม (bolometric magnitude) ของดาวเปลี่ยนจาก 3.46 ไปเป็น 4.08 จากการวัดโดยวิธี Doppler เราพบว่าระหว่างการขยายและหดตัว ผิวดาวมีความเร็วเฉลี่ยในแนวรัศมีเท่ากับ  $12.8 \text{ km s}^{-1}$  ในระหว่างคาบของการสั่นความยาวคลื่นที่สเปกตรัมมีความสว่างสูงสุดอยู่ระหว่าง 531.0 nm และ 649.1 nm (วัดโดยผู้สังเกตที่ผิวดาว)

(T6.1) จงหาอัตราส่วนของรัศมีดาวในขณะที่มีขนาดเล็กและใหญ่ที่สุด ( $R_1/R_2$ )

7

(T6.2) จงหารัศมีของดาว (ในหน่วยเมตร) ในขณะที่มีขนาดเล็กและใหญ่ที่สุด ( $R_1$  และ  $R_2$ )

3

(T6.3) จงคำนวณฟลักซ์  $F_2$  ในขณะที่ดาวมีขนาดใหญ่ที่สุด

5

(T6.4) จงหาระยะทางจากโลกไปยังดาวดวงดังกล่าว  $D_{\text{star}}$  ในหน่วย parsecs

5

(T7) **Telescope optics**

กล้องโทรทรรศน์หักเหแสงในอุดมคติที่มี focal ratio  $f/5$  มีความยาวโฟกัสเลนส์วัตถุและเลนส์ตา 100 cm และ 1 cm ตามลำดับ

(T7.1) จงคำนวณกำลังขยาย  $m_0$  และความยาว  $L_0$  ของกล้องโทรทรรศน์ เมื่อกำหนดให้มีความยาวของกล้องเท่ากับ ระยะห่างระหว่างเลนส์วัตถุและเลนส์ตา

4

หนึ่งในวิธีการเพิ่มกำลังขยายโดยไม่เพิ่มความยาวของกล้องโทรทรรศน์มากเกินไป คือการเพิ่มเลนส์เว้า (Barlow lens) ที่จุดระหว่างเลนส์วัตถุและจุดโฟกัสปฐมภูมิ (Prime focus) หากเราติดตั้ง Barlow lens ความยาวโฟกัส 1 cm ระหว่างเลนส์วัตถุและเลนส์ตาเพื่อเพิ่มกำลังขยายเป็น 2 เท่าของค่าเดิม

(T7.2) จงคำนวณระยะ  $d_B$  จากจุดโฟกัสปฐมภูมิที่ต้องติดตั้ง Barlow lens เพื่อเพิ่มกำลังขยายเป็น 2 เท่า

6

(T7.3) จงคำนวณความยาวที่เพิ่มขึ้นของกล้องโทรทรรศน์  $\Delta L$

4

หากเราสร้างกล้องโทรทรรศน์โดยใช้เลนส์วัตถุจากข้างต้น และมีอุปกรณ์บันทึกสัญญาณ CCD อยู่ที่จุดโฟกัสปฐมภูมิโดยที่ CCD มีขนาด Pixel เท่ากับ  $10 \mu\text{m}$  (ไม่ใช่ Barlow lens และเลนส์ตา)

(T7.4) จงหาระยะห่าง  $n_p$  ในหน่วย pixels ระหว่างจุดศูนย์กลางของภาพดาวสองดวงที่อยู่ห่างกัน  $20''$  บนท้องฟ้า

6

(T8) **U-Band photometry**

ดาวดวงหนึ่งมีโชติมาตรปรากฏใน U-band  $m_U = 15.0$  กำหนดให้แผ่นกรองแสง U-band ที่ใช้เป็นแบบอุดมคติ กล่าวคือ ในช่วงความยาวคลื่นที่ต้องการแผ่นกรองแสงปล่อยให้แสงผ่านได้ 100% และมีความทึบแสงสนิทในช่วงคลื่นอื่น จุดศูนย์กลางและความกว้างความยาวคลื่นของแผ่นกรองแสงเท่ากับ 360 nm และ 80 nm ตามลำดับ ให้สมมติว่าดาวดวงดังกล่าวมีสเปกตรัมคงตัวทุกความถี่ในช่วงที่ศึกษา (flat spectrum) การแปลงโชติมาตรปรากฏ (magnitude) ในย่านความยาวคลื่นใด ๆ ให้เป็นค่าฟลักซ์  $f$  ของดาวในหน่วย Jansky ( $1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$ ) สามารถทำได้โดยใช้สมการ

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy}$$

(T8.1) จงประมาณจำนวนโฟตอน  $N_0$  ในย่าน U-band จากดาวข้างต้นที่ตกกระทบพื้นที่  $1 \text{ m}^2$  ต่อวินาที ณ ผิวนอกของชั้นบรรยากาศโลก 8

ถ้าหากเราใช้กล้องโทรทรรศน์ที่อยู่บนพื้นโลกซึ่งมีกระจกปฐมภูมิขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 เมตร เพื่อวัดความสว่างใน U-band ของดาวดวงดังกล่าว โดยในขณะที่ทำการวัดความสว่าง เกิดการสูญเสียเนื่องจากชั้นบรรยากาศ (Atmospheric extinction) 50% ใน U-band ให้สมมติว่าสภาพ seeing ดีมาก (diffraction limited) และความสว่างโดยเฉลี่ยของท้องฟ้าใน U-band ของคืนที่เก็บข้อมูลเท่ากับ  $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$

(T8.2) จงหาอัตราส่วนของจำนวนโฟตอนต่อวินาทีที่ได้รับจากดาวเทียบกับจำนวนโฟตอนต่อวินาทีจากท้องฟ้า เมื่อทำการวัดโดยใช้ aperture วงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง  $2''$  8

(T8.3) ในทางปฏิบัติ 20% ของโฟตอนใน U-band ที่ตกกระทบกระจกปฐมภูมิเท่านั้นที่ถูกตรวจจับได้โดยอุปกรณ์วัดสัญญาณ จงหาจำนวนโฟตอนจากดาวที่จะถูกบันทึกได้ต่อวินาที 4

(T9) **Mars Orbiter Mission**

ยาน Mars Orbiter Mission (MOM) ของอินเดียถูกส่งขึ้นไปด้วยจรวด Polar Satellite Launch Vehicle (PSLV) เมื่อวันที่ 5 พฤศจิกายน 2013 โครงสร้างของยานและเครื่องมือวัดต่างๆมีมวลรวมกัน  $500 \text{ kg}$  นอกจากนี้ยังมีเชื้อเพลิงมวล  $852 \text{ kg}$  ด้วย ยานถูกส่งไปยังวงโคจรแบบวงรี (elliptical orbit) รอบโลกโดยมีจุดใกล้สุด (perigee) ที่ความสูง  $264.1 \text{ km}$  และมีจุดไกลสุด (apogee)  $23903.6 \text{ km}$  เมื่อวัดจากพื้นผิวโลก หลังจากทำการปรับวงโคจรแบบนี้จำนวน 6 ครั้งแล้วยานก็จะอยู่ในตำแหน่งที่พร้อมจะถูกส่งต่อไปยังดาวอังคาร (trans-Mars injection orbit หรือ Hohmann orbit)

การปรับวงโคจรครั้งที่ 1 ทำโดยการใช้เครื่องยนต์จรวดเป็นเวลาสั้นๆ ขณะที่ยานอยู่ที่ perigee และการปรับวงโคจรดังกล่าวกระทำโดยไม่เปลี่ยนระนาบวงโคจรและจุด perigee การจุดเครื่องยนต์จรวดให้อิมพัลส์ (impulse) รวมกับยานเท่ากับ  $1.73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$  ในการคำนวณข้อย่อยต่อไปนี้นักเรียนไม่ต้องคำนึงถึงการเปลี่ยนมวลเนื่องจากการเผาไหม้เชื้อเพลิง

(T9.1) จงคำนวณหาความสูงของจุดไกลสุด (apogee),  $h_a$ , ของวงโคจรใหม่หลังจากการจุดเครื่องยนต์จรวด โดยวัดความสูงเทียบกับพื้นผิวโลก 14

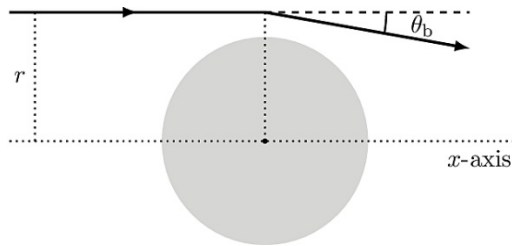
(T9.2) จงคำนวณหาค่า eccentricity ( $e$ ) ของวงโคจรใหม่ และคำนวณหาคาบของวงโคจรใหม่ในหน่วยชั่วโมง 6

(T10) Gravitational Lensing Telescope

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ทำนายไว้ว่า แสงจะเดินทางเป็นเส้นโค้งใกล้วัตถุที่มีมวล ในคำถามข้อนี้เราจะประมาณว่า การหักเหเกิดขึ้นที่จุดจุดเดียวสำหรับแต่ละเส้นทางเดินของแสง (light ray) ดังแสดงในภาพด้านล่าง โดยที่มีมุมเบี่ยงเบน,  $\theta_b$ , เท่ากับ

$$\theta_b = \frac{2R_{\text{Sch}}}{r}$$

เมื่อ  $R_{\text{Sch}}$  คือ Schwarzschild Radius ของวัตถุทรงกลมนั้น เราจะใช้สัญลักษณ์  $r$  เป็น impact parameter ของเส้นทางเดินของแสงวัดไปถึงแกน  $x$  ซึ่งเป็นแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล



ดังนั้นมวลขนาดใหญ่จึงทำหน้าที่เสมือนเลนส์โฟกัสแสงจากระยะอนันต์ที่มี impact parameter  $r$  ไปรวมกันบนแกนที่ระยะ  $f_r$  จากจุดศูนย์กลางมวล การรวมกันของแสงทำให้ผู้สังเกตที่ตำแหน่งนี้วัดความเข้มแสงได้สูงขึ้นไปกว่าปกติอย่างมาก ดังนั้นวัตถุขนาดใหญ่ในกรณีนี้จึงเป็นคล้ายกล้องโทรทรรศน์โน้มถ่วง (Gravitational Lensing Telescope) ที่ขยายสัญญาณจากวัตถุระยะไกล

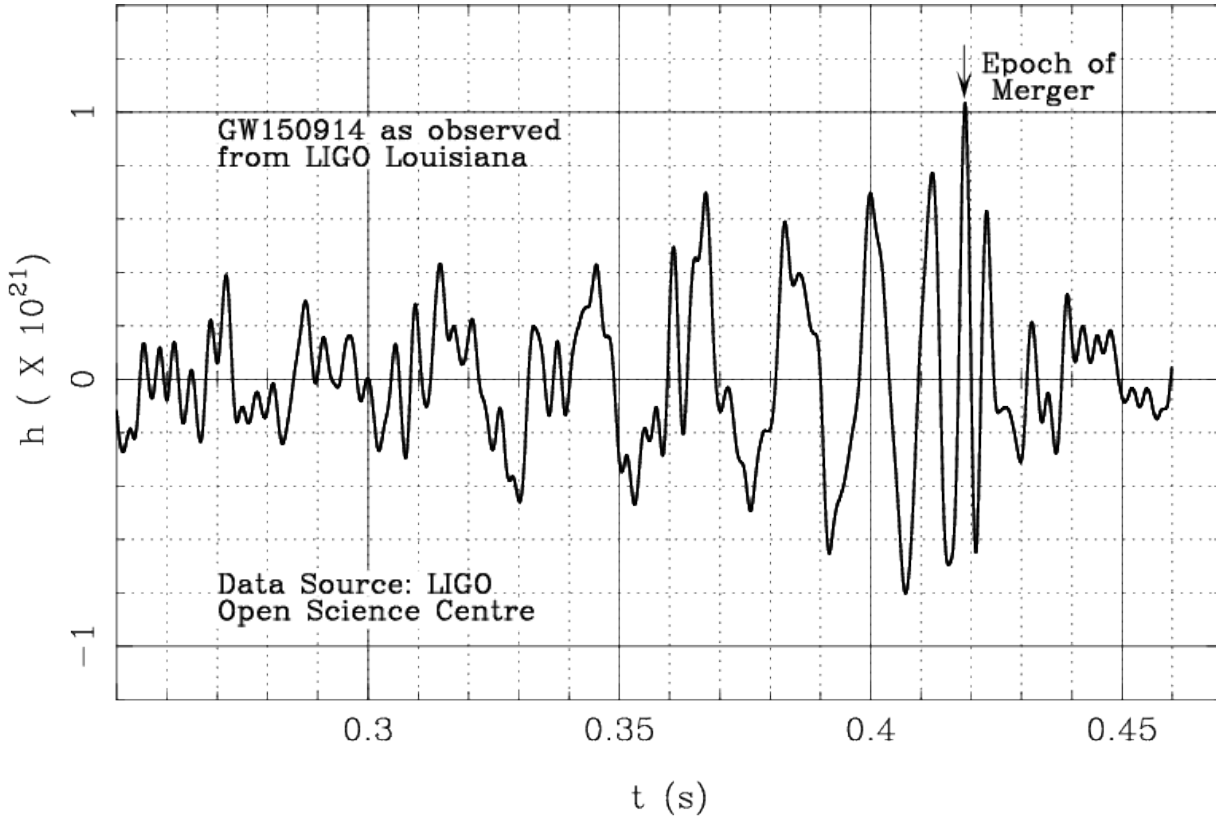
(T10.1) ในกรณีที่ดวงอาทิตย์ของเราทำหน้าที่เป็นกล้องโทรทรรศน์โน้มถ่วง จงคำนวณหาระยะโฟกัสน้อยสุด,  $f_{\text{min}}$  ที่จะเกิดขึ้นได้ ให้วัดระยะโฟกัสจากจุดศูนย์กลางมวลของดวงอาทิตย์ในหน่วย AU 6

(T10.2) ตัวตรวจวัดแสงที่มีพื้นที่รับแสงเป็นวงกลม (circular detector) รัศมี  $a$  ถูกตั้งไว้ที่ระยะ  $f_{\text{min}}$  บนแกน  $x$  โดยให้ระนาบรับแสงตั้งฉากกับแกน  $x$  ในกรณีนี้จะมีแสงที่ผ่านวงแหวนที่หนา  $h$  (โดยที่  $h \ll R_{\odot}$ ) รอบดวงอาทิตย์เท่านั้นที่จะตกกระทบตัวตรวจวัด เรานิยามให้กำลังขยาย (amplification factor,  $A_m$ ) เท่ากับอัตราส่วนของความเข้มแสงที่ตกกระทบในกรณีที่มีดวงอาทิตย์ต่อความเข้มแสงในกรณีที่ไม่มีดวงอาทิตย์ จงหา  $A_m$  ที่ตำแหน่ง  $f_{\text{min}}$  ให้ตอบในรูปของ  $R_{\odot}$  และ  $a$  8

(T10.3) ให้นักเรียนพิจารณามวลทรงกลมที่โปร่งแสง (เช่น สสารมืด) ที่มีความหนาแน่นไม่สม่ำเสมอ กำหนดให้มวล  $M(r)$  ที่อยู่ภายในรัศมี  $r$  เท่านั้นที่ส่งผลต่อความโค้งของแสงที่มี impact parameter  $r$  จงหาว่า  $M(r)$  ควรจะขึ้นกับ  $r$  อย่างไรเพื่อให้เลนส์โน้มถ่วงนี้มีสมบัติเหมือนเลนส์นูนอุดมคติ 6

(T11) Gravitational Waves

LIGO ที่เมือง Hanford และ Livingston ประเทศสหรัฐอเมริกาตรวจพบคลื่นความโน้มถ่วงในเดือนกันยายน 2015 กราฟด้านล่าง แสดงผลการตรวจวัดที่ได้ ในคำถามข้อนี้เราจะพยายามทำความเข้าใจที่มาของคลื่นความโน้มถ่วง โดยการสมมติสถานการณ์ว่ามี มวลทดสอบขนาดเล็ก  $m$  เคลื่อนที่รอบมวลขนาดใหญ่  $M$  ( $m \ll M$ ) โดยที่มวล  $M$  ในแต่ละข้อย่อยจะเป็นวัตถุต่างชนิดกัน



มวลทดสอบจะสูญเสียพลังงานในรูปของคลื่นความโน้มถ่วง ซึ่งส่งผลให้รัศมีวงโคจรมีขนาดน้อยลงจนกระทั่งมวลทดสอบเข้าไปใกล้ผิวของมวลขนาดใหญ่ แต่ในกรณีที่มวลขนาดใหญ่เป็นหลุมดำนั้นมวลทดสอบจะเข้าไปจนถึงวงโคจรเล็กสุดที่เสถียร (innermost stable circular orbit หรือ ISCO) ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{sch}}$  เมื่อ  $R_{\text{sch}}$  คือ Schwarzschild Radius ของหลุมดำ เหตุการณ์นี้จะเกิดขึ้นที่ เวลาของการรวมกัน (epoch of merger) ซึ่งจะเป็นเวลาที่แอมพลิจูดและความถี่ของคลื่นความโน้มถ่วงมีค่าได้ที่สุด ในคำถามข้อนี้เราจะเน้นที่คลื่นความโน้มถ่วงก่อนเวลาของการรวมกัน กำหนดให้ความถี่ของคลื่นความโน้มถ่วงมีค่าเป็น 2 เท่าของความถี่การโคจรเสมอและนักเรียนสามารถใช้กฎของเคปเลอร์ได้ หลังจากเวลาของการรวมกันแล้ว คลื่นความโน้มถ่วงจะมีลักษณะแตกต่างไปจากเดิมอย่างมาก

(T11.1) พิจารณาคลื่นความโน้มถ่วงที่แสดงในรูปด้านบน ให้นักเรียนประมาณคาบ  $T_0$  แล้วคำนวณความถี่  $f_0$  ที่เวลาของการรวมกัน (epoch of merger) 3

(T11.2) สำหรับดาวในแถบกระบวนหลัก (main sequence star, MS) รัศมีของ  $R_{\text{MS}}$  และมวลของดาว  $M_{\text{MS}}$  มีความสัมพันธ์กันดังนี้ 10

$$R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^\alpha$$

โดยที่  $\alpha = 0.8$  เมื่อ  $M_\odot < M_{\text{MS}}$

$$= 1.0$$
 เมื่อ  $0.08M_\odot \leq M_{\text{MS}} \leq M_\odot$

ถ้ามวลขนาดใหญ่เป็นดาวในแถบกระบวนหลัก จงหาความถี่สูงสุด  $f_{\text{MS}}$  ก่อนเวลาของการรวมกัน เขียนคำตอบในรูปของ  $M_{\text{MS}}/M_\odot$  และ  $\alpha$

- (T11.3) จากความสัมพันธ์ที่ได้ให้หาว่าความถี่สูงสุดที่เป็นไปได้เกิดขึ้นที่  $\alpha$  มีค่าเท่าใด แล้วคำนวณค่าความถี่เป็นตัวเลข 9
- (T11.4) ดาวแคระขาว (White dwarf, WD) สามารถมีมวลได้มากที่สุดเท่ากับ  $1.44 M_{\odot}$  (จากขีดจำกัด Chandrasekhar limit) โดยที่ความสัมพันธ์ของรัศมีและมวลคือ  $R \propto M^{-1/3}$  สำหรับดาวแคระขาวที่มีมวลเท่าดวงอาทิตย์จะมีรัศมีเท่ากับ  $6000 \text{ km}$  จงหาความถี่สูงสุด  $f_{WD,max}$  ของคลื่นความโน้มถ่วงถ้ามวลทดสอบนั้นโคจรรอบดาวแคระขาว และคำนวณค่าความถี่เป็นตัวเลข 8
- (T11.5) ดาวนิวตรอน (Neutron star, NS) มีมวลโดยทั่วไประหว่าง  $1M_{\odot}$  ถึง  $3M_{\odot}$  และมีรัศมีระหว่าง  $10 - 15 \text{ km}$  ในกรณีที่มวลทดสอบโคจรรอบดาวนิวตรอนและมีวงโคจรใกล้เคียงกับรัศมีของดาวนิวตรอน จงคำนวณหาความถี่ต่ำสุด  $f_{NS,min}$  และความถี่สูงสุด  $f_{NS,max}$  ที่เป็นไปได้ของคลื่นความโน้มถ่วง 8
- (T11.6) ในกรณีที่มวลทดสอบโคจรรอบหลุมดำ (Black hole, BH) จงหาความถี่ของคลื่นความโน้มถ่วง  $f_{BH}$  ในรูปของมวลของหลุมดำ  $M_{BH}$  และมวลของดวงอาทิตย์  $M_{\odot}$  7
- (T11.7) จากคาบ (หรือความถี่) ของกราฟคลื่นความโน้มถ่วงก่อนเวลาของการรวมกันที่นักเรียนประมาณไว้ในข้อก่อนหน้า ให้วิเคราะห์ว่ามวลขนาดใหญ่ขึ้นควรเป็น ดาวในแถบกระบวนหลัก ดาวแคระขาว ดาวนิวตรอนหรือหลุมดำ ให้ทำเครื่องหมายถูกในกระดาษสรุปคำตอบ แล้วหาว่ามวลของวัตถุขนาดใหญ่  $M_{obj}$  มีค่าเป็นกี่เท่าของมวลดวงอาทิตย์  $M_{\odot}$  5

## (T12) Exoplanets

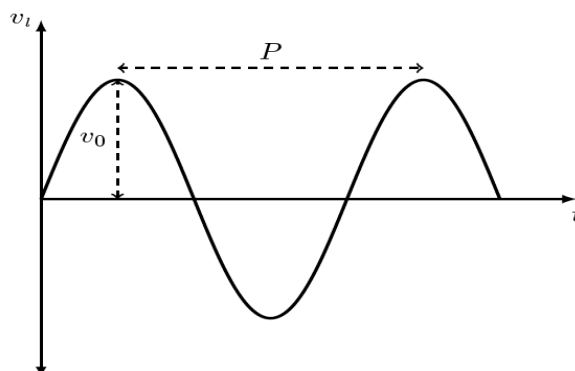
การค้นหาดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะ (exoplanets) มักใช้วิธีการหลักอยู่สองวิธี คือ วิธีการวัดความเร็วในแนวเล็ง (radial velocity method) หรือบางครั้งเรียกว่าการวัดการส่าย (wobble) และวิธีทรานสิท (transit method) ในคำถามข้อนี้เราจะพิจารณาทั้งสองวิธีและนำมาใช้ร่วมกันเพื่อวิเคราะห์ข้อมูลและสมบัติของดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะ

กำหนดให้ดาวเคราะห์มีมวล  $M_p$  และรัศมี  $R_p$  โคจรเป็นวงกลมรอบดาวฤกษ์มวล  $M_s$  ( $M_s \gg M_p$ ) รัศมี  $R_s$  และกำหนดให้เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบวงโคจรทำมุม  $i$  กับแนวเล็ง (ถ้า  $i = 90^\circ$  จะหมายถึงวงโคจรแบบ edge-on) นอกจากนี้ให้สมมติว่าไม่มีดาวเคราะห์ดวงอื่นโคจรรอบดาวฤกษ์ และ  $R_s \ll a$

### “Wobble” Method:

ดาวฤกษ์และดาวเคราะห์ต่างก็โคจรรอบจุดศูนย์กลางมวล (barycenter) ซึ่งทำให้เราเห็นดาวฤกษ์มีการเคลื่อนที่เล็กน้อย หรือมีการส่าย (wobble) ผลจากการส่ายทำให้แสงที่มาจากดาวฤกษ์เกิด Doppler Shift ตามความเร็วของการส่าย

ความเร็วตามแนวเล็ง  $v_l$  ของดาวฤกษ์สามารถคำนวณได้จาก Doppler Shift ของเส้นสเปกตรัมและคาบของการเปลี่ยนแปลงตามที่แสดงในรูปกราฟด้านล่างนี้ สัญลักษณ์  $P$  คือคาบของวงโคจร และ  $v_0$  คือความเร็วสูงสุดตามแนวเล็ง



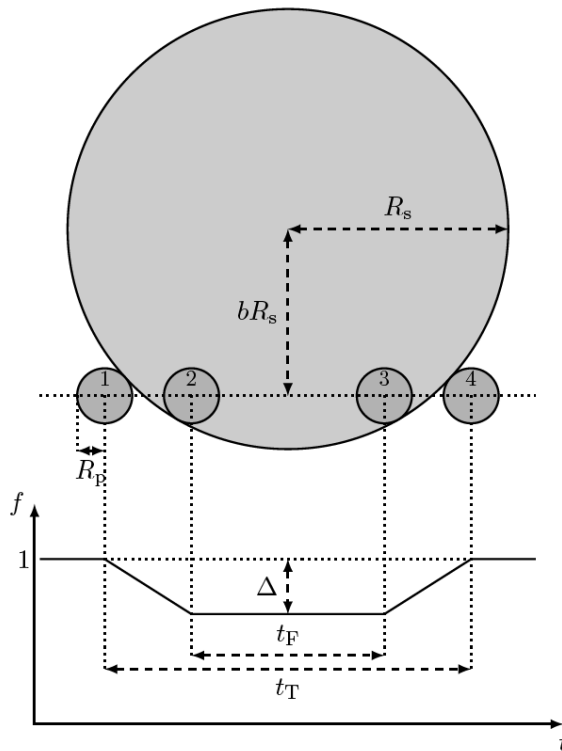
(T12.1) จงคำนวณหารัศมีของวงโคจร  $a$  และอัตราเร็วการโคจร  $v_p$  ของดาวเคราะห์ ให้เขียนคำตอบในรูปของมวลของดาวฤกษ์  $M_s$  และคาบการโคจร  $P$  3

(T12.2) จงหามวลขั้นต่ำ (lower limit) ของดาวเคราะห์  $M_{p,\min}$  ให้เขียนคำตอบในรูปของ  $M_s$ ,  $v_0$  และ  $v_p$  4

**Transit Method:**

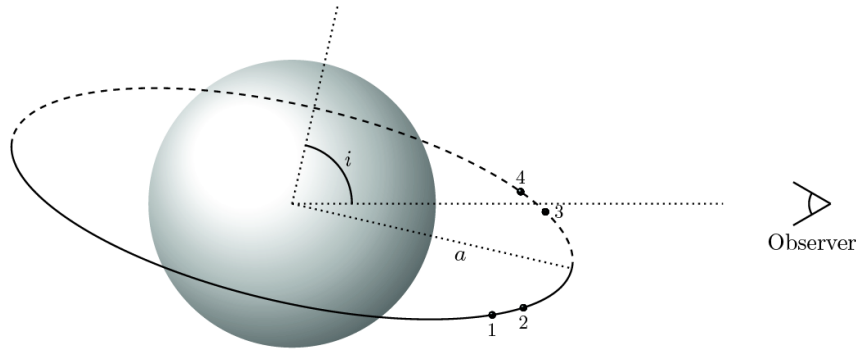
ดาวเคราะห์ที่มีระนาบวงโคจรใกล้เคียงกับ **edge-on** ( $i \approx 90^\circ$ ) จะเคลื่อนที่ผ่านหน้าดาวฤกษ์ หรือมีการทรานสิท (transit) เราสามารถตรวจวัดฟลักซ์จากดาวฤกษ์ที่ลดลงเล็กน้อยเนื่องจากการทรานสิทนี้ได้ กราฟด้านล่างแสดงผลการวัดฟลักซ์  $f$  อย่างหยาบๆ ที่เวลา  $t$  ระหว่างการทรานสิท (transit light curve) ในกรณีนี้ดาวฤกษ์มีความสว่างสม่ำเสมอเท่ากันทั้งดวง (uniformly bright stellar disc)

ถ้ามุม  $i = 90^\circ$  พอดี ดาวเคราะห์จะเคลื่อนผ่านดาวฤกษ์ที่แนวเส้นผ่านศูนย์กลางพอดี แต่สำหรับค่าอื่นๆของมุม  $i$  การทรานสิทจะเกิดขึ้นตามแนวคอร์ดที่ระยะ  $bR_s$  จากศูนย์กลางวงกลมดังแสดงในภาพด้านล่าง กำหนดให้ค่าของฟลักซ์ในกรณีที่ไม่มีทรานสิทเท่ากับ 1 และให้  $\Delta$  เป็นค่าของฟลักซ์ที่ลดลงสูงสุดขณะที่เกิดการทรานสิท



ระหว่างการทรานสิทมีจุด contact ที่สำคัญจำนวนสี่จุด ซึ่งกำกับโดยเลข 1 ถึง เลข 4 ดังแสดงในแผนภาพ กำหนดให้  $t_F$  เป็นช่วงเวลาจากจุดที่ 2 ไปยังจุดที่ 3 และให้  $t_T$  เป็นช่วงเวลาจากจุดที่ 1 ไปยังจุดที่ 4 จุดทั้งสี่นี้ยังถูกแสดงไว้ในภาพวงโคจรด้านล่างเมื่อมองจากด้านข้าง





ปริมาณที่สามารถทำการวัดได้โดยวิธีทรานสิท คือ  $P$ ,  $t_T$ ,  $t_F$  และ  $\Delta$

(T12.3) จงหาช่วงของ  $i$  ที่ทำให้สามารถเห็นการทรานสิทนี้ได้ ให้อตอบในรูปของ  $R_S$  และ  $a$

2

(T12.4) จงหา  $\Delta$  ในรูปของ  $R_S$  และ  $R_p$

1

(T12.5) จงหาค่า  $t_T$  และ  $t_F$  ในรูปของ  $R_S$ ,  $R_p$ ,  $a$ ,  $P$  และ  $b$

8

(T12.6) ในกรณีที่รัศมีวงโคจรมีค่าโตกว่ารัศมีดาวฤกษ์มากๆ จงแสดงว่า  $b$  มีค่าโดยประมาณเท่ากับ

5

$$b = \left[ 1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

(T12.7) ใช้ผลจากข้อ T12.6 เพื่อหาอัตราส่วน  $a/R_S$  ในรูปของตัวแปรต่างๆที่วัดได้ระหว่างการทรานสิท ให้ใช้การประมาณที่เหมาะสม

3

(T12.8) ให้รวมผลจากวิธีวัดการส่าย (wobble method) และผลจากวิธีทรานสิท เพื่อคำนวณหาความหนาแน่นเฉลี่ยของ

6

$$\text{ดาวฤกษ์ } \rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3} \text{ ให้อตอบในรูปของ } t_T, t_F, \Delta \text{ และ } P$$

**Rocky or gaseous** (วิเคราะห์ว่าเป็นดาวเคราะห์หินหรือดาวเคราะห์แก๊ส):

ในคำถามย่อนี้ให้สมมติว่าเป็นระบบแบบ edge-on ( $i = 90^\circ$ ) เมื่อสังเกตจากโลก และดาวเคราะห์มีวงโคจรเป็นวงกลม กำหนดให้ดาวฤกษ์มีมวลเท่ากับ  $1.00M_\odot$  และการทรานสิทมีคาบ  $P = 50.0$  วัน เวลาระหว่างการทรานสิท  $t_T = 1.00$  ชั่วโมง และพลักซ์ที่ลดลง  $\Delta = 0.0064$  และจากการสังเกตด้วยวิธีการส่ายพบว่า ความเร็วสูงสุดในแนวเล็ง  $v_0 = 0.400 \text{ ms}^{-1}$

(T12.9) จงหารัศมี  $a$  ของวงโคจรดาวเคราะห์ ให้อตอบในหน่วย AU และในหน่วยเมตร

2

(T12.10) จงหาอัตราส่วน  $t_F/t_T$  ของระบบนี้

2

(T12.11) จงหามวล  $M_p$  และรัศมี  $R_p$  ของดาวเคราะห์ในรูปของมวล  $M_\oplus$  และรัศมี  $R_\oplus$  ของโลก จากนั้นวิเคราะห์ว่าดาวเคราะห์ดวงนี้ควรจะเป็นดาวเคราะห์หินหรือดาวเคราะห์แก๊ส ให้ทำเครื่องหมายหลังช่อง ROCKY และ GASEOUS ที่สอดคล้องกับคำตอบในกระดาษสรุปคำตอบ

8



**Transit light curves with starspots and limb darkening:**

(12.12) ให้พิจารณากรณี  $i = 90^\circ$  สำหรับระบบที่ดาวฤกษ์มีจุดดับ (starspot) จำนวน 1 จุดในแนวเส้นศูนย์สูตรพอดี โดยที่จุดดับนี้มีรัศมีใกล้เคียงกับขนาดของดาวเคราะห์  $R_p$  กำหนดให้คาบการโคจรของดาวฤกษ์เท่ากับ  $2P$  ให้นักเรียนสเก็ตช์กราฟของฟลักซ์ระหว่างการทรานสิท (transit light curve) ที่เกิดขึ้นจำนวน 5 ครั้งติดต่อกัน กำหนดให้ฟลักซ์เท่ากับ 1 ขณะที่ไม่มีการทรานสิท และกำหนดให้ดาวเคราะห์ไม่ซ้อนทับกับจุดดับเลยในการทรานสิทครั้งที่หนึ่ง แต่มีการซ้อนทับในครั้งที่สอง

4

(12.13) ในข้อที่ผ่านมาเราพิจารณากรณีที่ดาวฤกษ์มีความสว่างอย่างสม่ำเสมอ (uniformly bright stellar disc) แต่ดาวฤกษ์จริงจะมีความสว่างบริเวณตรงกลางสูงกว่าที่ขอบ หรือมี limb darkening ให้นักเรียนสเก็ตช์กราฟฟลักซ์ของแสง (transit light curve) ในกรณีที่ดาวฤกษ์มี limb darkening

2